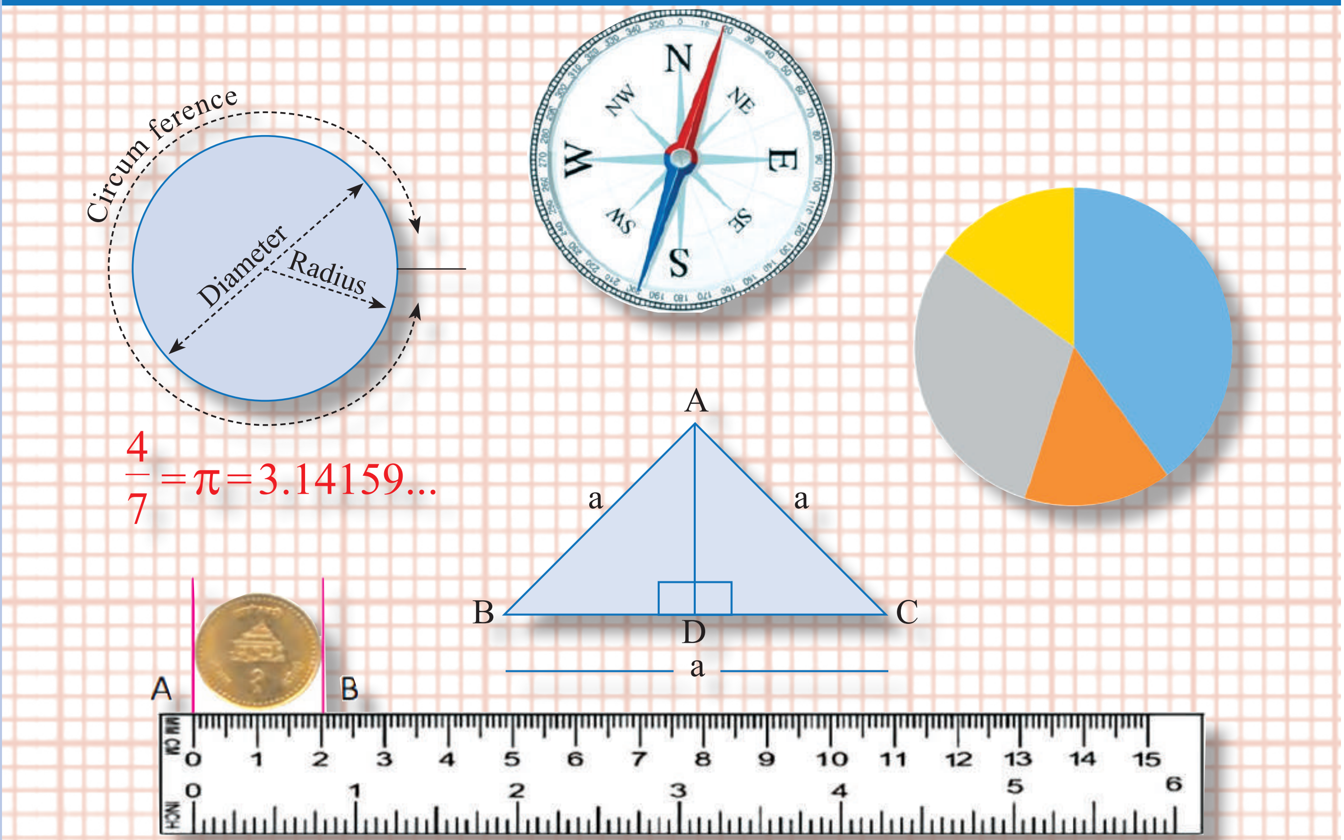
अनौपचारिक तथा वैकल्पिक शिक्षातर्फको

गणित

तह -३, (कक्षा ६-८)

भाग दुई

सिकाइ सामग्री



नेपाल सरकार

शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय

शिक्षा तथा मानव स्रोत विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

गणित तह -३, (कक्षा ६-८) भाग दुई

अनौपचारिक तथा वैकल्पिक शिक्षातर्फको

गणित

तह –३ (कक्षा ६–८)

भाग दुई

सिकाइ सामग्री

नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
शिक्षा तथा मानव स्रोत विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

प्रकाशक : नेपाल सरकार

शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय

शिक्षा तथा मानव स्रोत विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

तह : तीन, भाग दुई

प्रथम संस्करण : वि.सं. २०८०

हाम्रो भनाइ

सिकाइ शिक्षा र जीविकोपार्जनको मूल हो । सिकारुमा अपेक्षित दक्षता विकास गर्न विभिन्न प्रकारका सिकाइ सामग्री आवश्यक पर्छन् । औपचारिक शिक्षामा पहुँच नपुगेका र विद्यालयबाहिर रहेका सिकारुलाई व्यावहारिक, समयसापेक्ष र गुणस्तरीय शिक्षाको अवसर दिने अनौपचारिक शिक्षातर्फ आधारभूत साक्षरता, गणितीय अवधारणा र सिप एवम् जीवनोपयोगी सिपको विकासको अवसर प्रदान गर्नु आवश्यक छ । आधारभूत शिक्षाको माध्यमबाट सिकारुले प्राकृतिक तथा सामाजिक वातावरणप्रति सचेत भई अनुशासन, सदाचार र स्वावलम्बनजस्ता सामाजिक एवम् चारित्रिक गुणको विकास गर्नुपर्छ । व्यक्तिको सिकाइले विज्ञान, वातावरण र सूचना प्रविधिसम्बन्धी आधारभूत ज्ञानको विकास गराई कला तथा सौन्दर्यप्रति अभिरुचि जगाउनुपर्छ । यस्तै जातजाति, धर्म, भाषा, संस्कृति, क्षेत्रप्रति सम्मान र समभावको विकास पनि आधारभूत शिक्षाका अपेक्षित पक्ष हुन् । देशप्रेम, राष्ट्रिय एकता, लोकतान्त्रिक मूल्यमान्यता तथा संस्कार सिकी व्यावहारिक जीवनमा प्रयोग गर्नु, सामाजिक गुणको विकास तथा नागरिक कर्तव्यप्रति सजगता अपनाउनु, स्तरअनुकूल व्यवहारकुशल सिपको प्रयोग गर्नु र दैनिक जीवनमा आइपर्ने व्यावहारिक समस्याको पहिचान गरी समाधानका उपायको खोजी गर्नुपनि आधारभूत तहको शिक्षाका आवश्यक पक्ष हुन् । यस पक्षलाई दृष्टिगत गरी भौगोलिक विकटता, गरिबी, जनचेतनाको कमीजस्ता कारणले औपचारिक शिक्षा लिन नसकेका तथा बिचैमा पढाइ छाडेका बालबालिका, युवायुवती तथा प्रौढलाई सिकाइमा पहुँच पुऱ्याउन अनौपचारिक तथा वैकल्पिक सिकाइका लागि सिकाइ सामग्री विकासको थालनी गरिएको छ । राष्ट्रिय पाठ्यक्रम प्रारूप र राष्ट्रिय योग्यता प्रारूपको मूल मर्मअनुरूप सिकारुका लागि मूल पाठ्यवस्तु र परिधीय पाठ्यवस्तु समावेश गरी सिकारुले आफ्नै प्रयत्नमा सिक्न सक्ने क्रियाकलाप समावेश गरी यो सिकाइ सामग्री विकास गरिएको छ । यसबाट औपचारिक शिक्षा लिईरहेका विद्यार्थीले समेत लाभ लिन सक्छन् ।

यो सामग्री अनौपचारिक तथा वैकल्पिक शिक्षातर्फ तह तीन भाग दुईको रूपमा विकास गरिएको हो । यसलाई परीक्षण गरी प्राप्त सुझाव र पृष्ठपोषणका आधारमा आवश्यक परिमार्जन गरिँदै लगिने छ । यसको विकासमा केएर नेपाल र समुन्नत नेपालको प्राविधिक सहयोग रहेको छ । गणित विषयको यस सिकाइ सामग्रीको विकास डा. श्यामप्रसाद आचार्य र श्री अनुपमा शर्माले गर्नुभएको हो । यसको सम्पादन डा. गणेशप्रसाद भट्टराईबाट भएको हो । पुस्तकको लेआउट डिजाइन दिपेश घिमिरेले गर्नुभएको हो । यस पुस्तकको विकासमा शिक्षा तथा मानव स्रोत विकास केन्द्रका महानिर्देशक श्री दीपक शर्मा, उपमहानिर्देशक श्री जयराम अधिकारी, निर्देशक श्री निलकण्ठ ढकाल र शाखा अधिकृत श्री वैकुण्ठ आचार्यको विशेष योगदान रहेको छ । यस पुस्तकको विकास तथा परिमार्जन कार्यमा संलग्न सबैप्रति शिक्षा तथा मानव स्रोत विकास केन्द्र धन्यवाद प्रकट गर्छ ।

यो सिकाइ सामग्री निर्धारित सक्षमता विकासका लागि तयार गरिएकाले सहजीकरण र सिकाइ क्रियाकलापको योजना नभई सिकारुको सिकाइलाई सहयोग पुऱ्याउने सहयोगी साधन हो । यसका लागि यस सामग्रीलाई सिकारुको सिकाइमा सहयोग पुऱ्याउने एउटा महत्त्वपूर्ण आधारका रूपमा सिकाइकेन्द्रित, अनुभवकेन्द्रित, उद्देश्यमूलक, प्रयोगमुखी र आफैँले गरेर सिक्ने ढाँचामा विकास गरिएको छ । सिकाइ र सिकारुको जीवन्त अनुभवबिच तादात्म्य कायम गर्दै यसको सहज प्रयोग गर्न सिकारुबाट अभ्यास र खोजको अपेक्षा गरिएको छ । यस सामग्रीलाई अझ परिष्कृत पार्नका लागि सहजकर्ता, सिकारु, अभिभावक, बुद्धिजीवी एवम् सम्पूर्ण पाठकहरूको समेत विशेष भूमिका रहने हुँदा सम्बद्ध सबैको रचनात्मक सुझावका लागि शिक्षा तथा मानव स्रोत विकास केन्द्र हार्दिक अनुरोध गर्छ ।

वि.सं. २०८०

शिक्षा तथा मानव स्रोत विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

विषयसूची

एकाइ 1 समूह
(Sets)

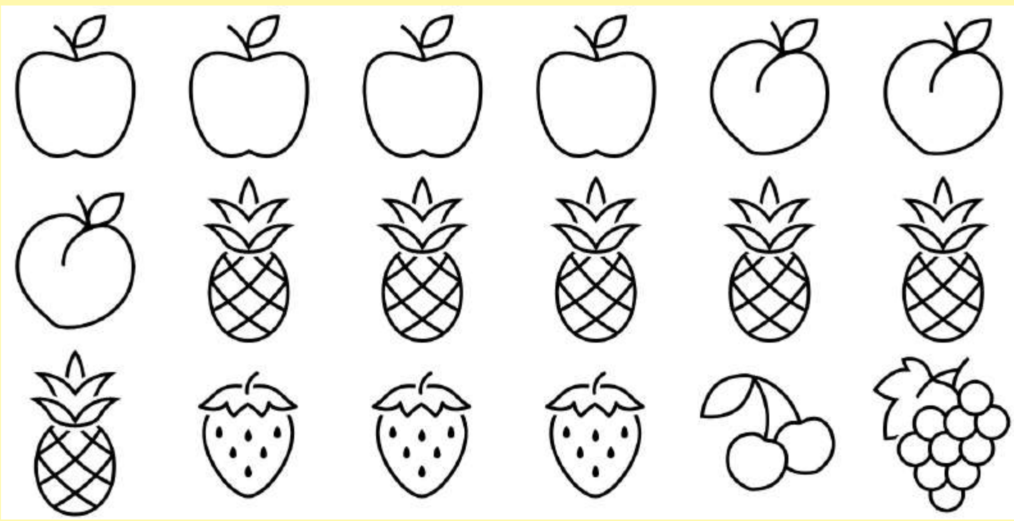
पाठ 1 सर्वव्यापक समूह र उपसमूह
(Universal sets and subsets)

परिचय

हामीले धेरै वस्तु सङ्कलन गरिरहेका हुन्छौँ तर ती वस्तुको गुण समान नहुन सक्छ । यदि ती सङ्कलन गरिएका वस्तुलाई मिल्ने गुणका आधारमा छुट्टाछुट्टै नाम दिएर राखियो भने ती छुट्टाछुट्टै वर्गीकृत सङ्कलन तयार गर्न सकिन्छ । त्यस्ता सङ्कलनलाई गणितमा समूह भनिन्छ । स्पष्टसँग परिभाषित वस्तुको सङ्कलनलाई समूह भनिन्छ । समूहमा भएका सदस्यको गुण सङ्ख्याका आधारमा समूहलाई विभिन्न प्रकारमा विभाजन गरिएको छ । यस पाठमा ती समूहका प्रकारका बारेमा छलफल गर्छौं ।

(क) सर्वव्यापक समूह (Universal sets)

सर्वव्यापक समूहका बारेमा बुझ्नका लागि तलको क्रियाकलाप पूरा गर्नुहोस् :



के माथिको समूहलाई फलफूलको समूह (Set of fruits) भन्न सकिन्छ ? विचार गर्नुहोस् ।

माथिको समूहबाट समान खाले फलफूल छानेर ससाना समूह पनि निर्माण गर्न सकिन्छ । जस्तै :

(क) स्याउको समूह (Set of apples)

(ख) भुइँकटहरको समूह (Set of pineapples)

यसै गरी थप समूह बनाउनुहोस् :

(ग) ....

(घ) ....

(ङ) ....

(च) ....

माथिको उदाहरणमा सबैभन्दा ठुलो समूह फलफूलको समूह नै हो । यस समूहमा त्यसका सदस्यबाट बनेका सबै समूहका सदस्य छन् । यो फलफूलको समूहलाई सर्वव्यापक समूह (Universal set) भनिन्छ भने त्यसबाट बनेका सबै (क) देखि (च) सम्मका समूहलाई सर्वव्यापक समूहका उपसमूह भनिन्छ ।

तलका प्रश्नको उत्तर के हुन्छ, विचार गर्नुहोस् :

(क) सर्वव्यापक समूह भनेको के हो ?

(ख) उपसमूह भनेको के हो ?

सर्वव्यापक समूह : कुनै समूहबाट बनेका सबै सदस्य समावेश भएको समूहलाई सर्वव्यापक समूह भनिन्छ । सर्वव्यापक समूहको सङ्केत दिइएको छैन भने त्यसलाई U ले जनाउन सकिन्छ ।

उपसमूह (Subsets) : सर्वव्यापक समूहका सदस्यबाट बनेका सबै समूहलाई सर्वव्यापक समूहका उपसमूह भनिन्छ ।

उदाहरण 1

कुनै समूह A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} एउटा दशभन्दा साना प्राकृतिक सङ्ख्याको समूह हो । यो समूहबाट अरू समूह बनाएर उपसमूह निर्माण गर्नुहोस् ।

समाधान :

दिइएको समूह U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} छ । यसबाट बन्ने उपसमूह यसप्रकार छन् :

(क) जोर सङ्ख्या मात्र लिऔँ :

दशसम्मका जोर सङ्ख्याको समूह (Set of even numbers up to 10):

E = {2, 4, 6 8, 10}

यो समूह 2 ले निःशेष भाग जाने 10 सम्मका प्राकृतिक सङ्ख्याको समूह पनि हो । यसैले E लाई दुई तरिकाबाट प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ।

(ख) बिजोर सङ्ख्या मात्र लिऔँ :

दशसम्मका बिजोर सङ्ख्याको समूह (Set of odd numbers up to 10): O = {1, 3, 5, 7, 9}

(ग) रूढ सङ्ख्या मात्र लिऔँ :

दश सम्मका रूढ सङ्ख्याको समूह (Set of prime numbers up to 10): P = {2, 3, 5, 7}

यसै गरी अन्य समूह पनि बनाउन सकिन्छ ।

(घ) के समूह U बाट 11 ले निःशेष भाग जाने सङ्ख्याको समूह बनाउन सकिन्छ ? विचार गरौँ । U को कुनै पनि सदस्य सङ्ख्यालाई 11 ले निःशेष भाग जाँदैन । 11 ले निःशेष भाग जाने 10 सम्मका सङ्ख्याको समूहलाई ः ले जनायौँ भने,

M = { } कुनै पनि सदस्य छैन ।

यस्तो कुनै पनि सदस्य नभएको समूहलाई खाली समूह भनिन्छ । त्यसैले ः एउटा खाली समूह हो ।

अतः यस उदाहरणमा A सर्वव्यापक समूह हो भने यसबाट बनेका अरू समूह E, O, P र M सबै U का उपसमूह हुन् ।

उदाहरण 2

अङ्ग्रेजी वर्णमालाका स्वर वर्णहरूको समूह, V = {a, e, i, o, u} छ भने यसबाट कतिओटा उपसमूह बनाउन सकिन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

दिइएको सर्वव्यापक समूह V = {a, e, i, o, u} दिइएको छ ।

यसबाट उपसमूह बनाउन विभिन्न तरिकाबाट सकिन्छ । एक पटकमा एउटा मात्र सदस्य लिएर,

एक पटकमा दुईओटा सदस्य लिएर, एक पटकमा पाँचओटै सदस्य लिएर

(क) एक पटकमा एउटा मात्र सदस्य लिएर उपसमूह बनाउँदा,

$A = \{a\}$, $B = \{e\}$, $C = \{i\}$, $D = \{o\}$, $E = \{u\}$

(ख) एक पटकमा दुईओटा सदस्य लिएर उपसमूह बनाउँदा, सदस्य नदोहोऱ्याई लेखौँ :

$F = \{a, e\}$, $G = \{a, i\}$, $H = \{a, o\}$, $I = \{a, u\}$,

$J = \{e, i\}$, $K = \{e, o\}$, $M = \{e, u\}$

$N = \{i, o\}$, $O = \{i, u\}$, $P = \{o,u\}$

(ग) एक पटकमा तीनओटा सदस्य मात्र लिएर

$Q = \{a, e, i\}$, $R \{e, i, o\}$, $S = \{i, o, u\}$,

$T = \{o, u, a\}$, $U = \{u, a, e\}$

(घ) एक पटकमा चारओटा मात्र सदस्य लिएर

$V = \{a, e, i, o\}$, $W = \{e, i, o, u\}$, $X = \{i, o, u, a\}$

$Y = \{o, u, a, e\}$ $Z = \{u, a, e, i\}$

(ङ) एक पटकमा पाँचओटै सदस्य लिएर

$\alpha = \{a, e, i, o, u\}$

(च) एक पटकमा कुनै पनि सदस्य नभएको खाली समूह बनाउँदा,

$\phi = \{ \}$

यसरी कुनै सर्वव्यापक समूहबाट धेरै उपसमूह बनाउन सकिन्छ ।

उपसमूहलाई जनाउने तरिका (Ways to Represent Sets)

माथिको उदाहरणमा V सर्वव्यापक समूह हो । सर्वव्यापक समूहलाई U ले मात्र जनाउनुपर्छ भन्ने छैन । त्यसैले यहाँ V ले जनाइएको छ । V को एउटा उपसमूह A छ ।

यसलाई A, V को उपसमूह हो भनिन्छ र लेख्दा $A \subset V$ लेखिन्छ ।

त्यसै गरी, B, V को उपसमूह हो । यसलाई सङ्केतमा लेख्दा, $B \subset V$ लेखिन्छ ।

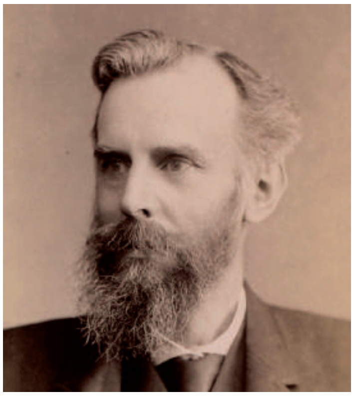
नोटः उपसमूह जनाउने चिह्न $\subset$ हो । जस्तै : $P \subset V$ लाई पढ्दा, P समूह V को उपसमूह हो भनी पढिन्छ । यसरी जनाउने उपसमूहलाई उपयुक्त उपसमूह भनिन्छ । तर यदि, सर्वव्यापक समूह र उपसमूहका सबै सदस्य उही छन् भने त्यस्तो उपसमूहलाई $\subseteq$ ले जनाइन्छ । यो सङ्केतले बराबर र उपसमूह भन्ने जनाउँछ । यस्तो उपसमूहलाई अनुपयुक्त उपसमूह भनिन्छ । माथिको उदाहरणमा

$V = \{a, e, i, o, u\}$ र यसको उपसमूह $\alpha = \{a, e, i, o, u\}$ छ । यी दुवै समूह बराबर पनि भएकाले, α, V को उपसमूह हो भनी लेख्दा, $\alpha \subseteq V$ लेखिन्छ । यसलाई α, V को अनुपयुक्त उपसमूह हो भनिन्छ ।

माथिको उदाहरणको निष्कर्ष :

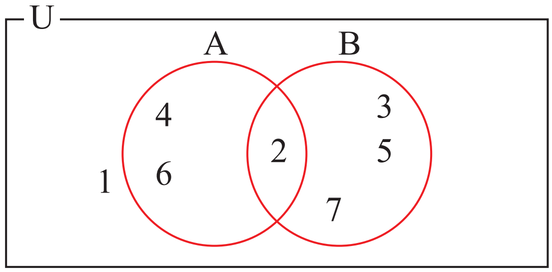
- कुनै सर्वव्यापक समूहका सबै वा केही सदस्यबाट बन्ने सबै समूह उपसमूह हुन् ।
- उपसमूह दुई प्रकारका छन् । यदि सर्वव्यापक समूहका केही मात्र सदस्य लिएर उपसमूह बनाइएको छ भने त्यस्तो उपसमूह उपयुक्त उपसमूह हो । सर्वव्यापक समूह र उपसमूह बराबर छ, अर्थात् उही र उत्ति नै सदस्य भएको उपसमूह छ भने त्यस्तो उपसमूह अनुपयुक्त उपसमूह हो ।
- खाली समूह जुनसुकै सर्वव्यापक समूहको उपसमूह हो । यो पनि अनुपयुक्त उपसमूह नै हो ।

भेनचित्र (Venn diagram)



ब्रिटिस गणितज्ञ जोन भेन (John Venn) भेनचित्र सन् १८८० मा पहिलो पटक प्रयोगमा ल्याएका हुन् । समूहको सम्बन्धलाई प्रस्तुत गर्ने आयत र वृत्त प्रयोग गरी बनाइएको चित्र भने चित्र हो । भेनचित्रमा आयतले सर्वव्यापक समूह र वृत्तले समूह जनाउँछ । वृत्तभित्र समूहका सदस्य लेखिन्छ ।

भेनचित्र समूहका क्रियालाई तार्किक रूपमा देखाउन प्रयोग गरिन्छ । उदाहरणका लागि, एउटा समूह $A = \{2, 4, 6\}$ तीनओटा 8 भन्दा साना जोर सङ्ख्याको समूह हो । अर्को समूह $B = \{2, 3, 5, 7\}$ चारओटा 8 भन्दा साना रूढ सङ्ख्याको समूह हो । यी दुवै समूह 8 भन्दा साना प्राकृतिक सङ्ख्याको समूह $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ बाट बनेको छ । यी समूहलाई भेन चित्रमा देखाउँदा,

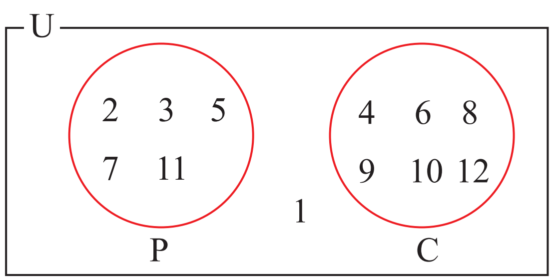


यहाँ, सर्वव्यापक समूह, U = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} छ। यही सर्वव्यापक समूहबाट समूह A र B बनेका छन् । A र B बिच साझा सदस्य 2 भएकाले यसलाई दुवै समूहको खप्टिएको भागमा लेखिएको छ। त्यसैले खप्टिएको भागले A र B को साझा सदस्य वा दुवैको प्रतिच्छेदन जनाउँछ । दुवै समूहमा भएका सबै सदस्यलाई कुनै पनि नदोहोरिने र नछुट्ने गरी लेखेर बन्ने समूह, C = {2, 3, 4, 5, 6, 7} हो। यस्तो सदस्यलाई A र B को संयोजन समूह भनिन्छ। A र B कुनैमा पनि नभएको तर सर्वव्यापक समूहमा भएको सदस्य 1 हो। U मा भएका सदस्यबाट C हटाउँदा 1 मात्र बाँकी रहन्छ। त्यसैले यसलाई A र B को संयोजनामा नपर्ने सदस्यको समूह वा C को पूरक समूह भनिन्छ किनभने यो पूरक समूहमा C थप्दा सर्वव्यापक समूह नै बन्छ।

माथि छलफल गरिएको संयोजन, पूरक, दुवैको साझा वा प्रतिच्छेदनलाई समूहका क्रियाहरू भनिन्छ।

उदाहरण 3

तलको चित्रमा दुईओटा समूहः रूढ सङ्ख्याको समूह (Set of prime numbers}, P = {2, 3, 5, 7, 11} र संयुक्त सङ्ख्याको समूह (Set of composite numbers), C = {4, 6, 8, 10, 12} छन् । तर यी समूहबाहेक पनि एउटा सदस्य आयतकार घेराभित्र छ। यस्तो सङ्ख्या पनि सर्वव्यापक समूहमा रहेको छ भन्ने बुझिन्छ। अब ती समूहबाट बनेको सर्वव्यापक समूहलाई U ले जनाई लेख्नुहोस् :



समाधान :

यहाँ, रूढ सङ्ख्याको समूहमा भएका सदस्य {2, 3, 5, 7, 11}, संयुक्त समूहका सदस्य {4, 6, 8, 9, 10, 12} र दुवै समूहमा नपर्ने सदस्य {1} समेतलाई समावेश गरी बन्ने सर्वव्यापक समूह यस प्रकार छ :

U = {2, 3, 5, 7, 11, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 1}

माथि बनाइएको सर्वव्यापक समूहमा समूहका सदस्यको क्रम मिलाइएको छैन । समूहमा सदस्यको क्रम मिलेको हुनुपर्दैन । तथापि ती सदस्यलाई मिलाएर राख्दा त्यसको व्याख्या गर्न सहज हुन्छ । अतः U का सदस्यलाई मिलाएर लेख्दाः

U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

यहाँ, सर्वव्यापक समूहमा 1 देखि 12 सम्मका सबै प्राकृतिक सङ्ख्या रहेका छन् । त्यसैले सो सर्वव्यापक समूह एकदेखि बाह्रसम्मका प्राकृतिक सङ्ख्याको समूह हो । यसरी सबै व्यापक समूहलाई आयतमा र त्यसका उपसमूहलाई वृत्तमा लेखिएको चित्रलाई भेनचित्र भनिन्छ ।

भेनचित्रका बारेमा थप चर्चा अर्को पाठमा गरिने छ ।

नोटः समूहका सदस्यलाई क्रममा लेख्नुपर्दैन । त्यसैले समूहलाई स्पष्टसँग परिभाषित क्रममा नमिलाइएका सदस्यहरूको सङ्कलन पनि भनिन्छ ।

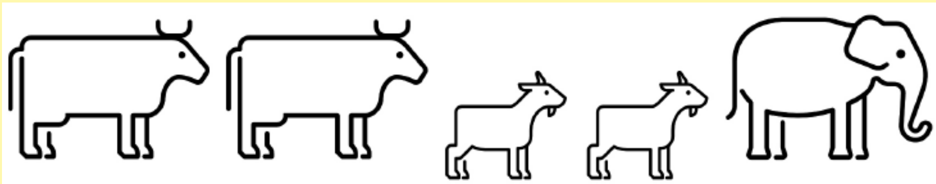
अभ्यासका लागि प्रश्न

(क) तलका प्रश्नको जवाफ दिनुहोस् :

1. सर्वव्यापक समूह भनेको के हो ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।
2. उपसमूह भनेको के हो ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।
3. कस्तो उपसमूहलाई उपयुक्त उपसमूह भनिन्छ ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।
4. कस्तो उपसमूहलाई अनुपयुक्त उपसमूह भनिन्छ ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।
5. यदि A = {p, q, r} र B = {p, q} भए, कुन सर्वव्यापक समूह हो ? कुन उपसमूह हो ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।

(ख) तलको जनावरको समूह दिइएको छ :

1. तलको समूह जनावरको समूह हो । यसलाई A ले जनाउँदा,



गाई बाखा हात्ती

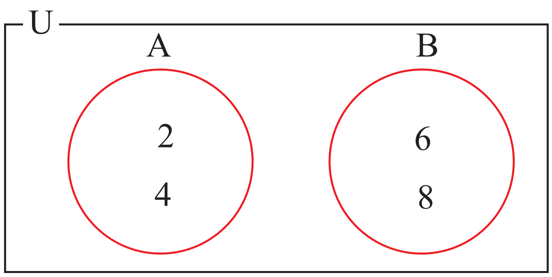
जनावरको समूह

समूह A = {गाई, बाखा, हात्ती} छ । यसका उपसमूह के के हुन्छन्, लेख्नुहोस् ।

नोटः आठओटा उपसमूह बनाउनुहोस् ।

2. दुईओटा उपसमूह A = {2, 4, 8} र B = {1, 3, 5, 7} छन् । यी उपसमूहमा भएका सबै सदस्य समावेश गरेर सर्वव्यापक समूह बनाउनुहोस् ।

3. तलको चित्रमा दुईओटा समूह दिइएको छ । ती समूहबाट बनेको सर्वव्यापक समूहलाई U ले जनाई लेख्नुहोस् :



कस्तो समूह बन्यो, वाक्यमा पनि लेख्नुहोस् ।

परियोजना कार्य

तपाईंको घरको भान्साकोठामा भएका सामग्रीको सूची बनाउनुहोस् । ती सामग्रीबाट कस्ता समूह बन्छन्, ती समूहको सूची बनाउनुहोस् ।

पाठ 2 अलग्गिएका र खप्टिएका समूह (Disjoint and Overlapping sets)

परिचय

धेरै समूहलाई तुलना गर्दा कुनै समूहमा सदस्य एक आपसमा दोहोरिएका हुन्छन् भने कुनै कुनै समूहमा सदस्य एकआपसमा दोहोरिएका हुँदैनन् । जस्तै : 10 भन्दा साना सङ्ख्याहरूको समूह र 10 भन्दा साना जोर सङ्ख्याको समूहमा ती समूहका सदस्य जोर सङ्ख्या दुवैमा दोहोरिएका हुन्छन् । यसरी समूहका सदस्य दोहोरिएका छन् कि छैनन् भनी हामी अलग्गिएका र खप्टिएका सदस्य छुट्याउने गर्छौँ । यस पाठमा यसै विषयमा चर्चा गर्छौँ ।

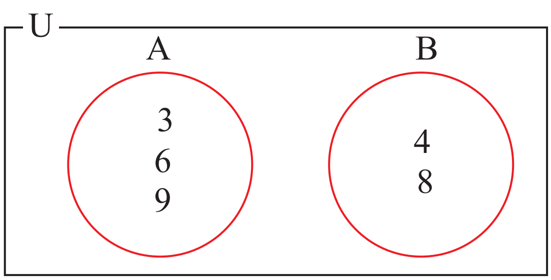
तलका उदाहरणमा समूह तुलना गरौँ :

उदाहरण 1

समूह A ले 3 का 10 सम्मका गुणङ्क जनाउँछ । त्यसैले, A = {3, 6, 9}

समूह B ले 4 का 10 सम्मका गुणाङ्क जनाउँछ । त्यसैले, B = {4, 8}

यी समूहलाई भेनचित्रमा देखाऔँ :



चित्र (क) अलग्गिएका समूह

माथिको भेनचित्रमा के A र B का सदस्य साझा वा दोहोरिएका छन् ?

पक्कै पनि ती समूहमा कुनै पनि सदस्य साझा छैनन् । यस्ता समूहलाई अलग्गिएका समूह भनिन्छ ।

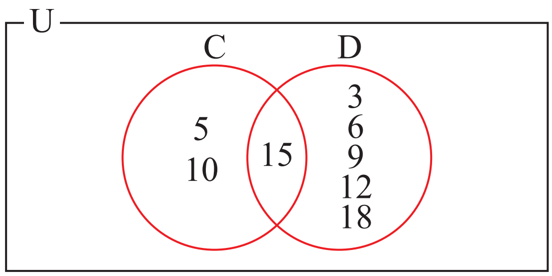
अलग्गिएका समूह (Disjoint sets) : दुई वा सोभन्दा बढी समूहमा ती समूहका सदस्य कुनै पनि समान छैनन् वा साझा छैनन् भने त्यस्ता समूहलाई अलग्गिएका समूह भनिन्छ ।

उदाहरण 2. तलका समूह हेरौँ :

- समूह C ले 5 का 20 सम्मका गुणाङ्कलाई जनाउँछ, C = {5, 10, 15, 20}
- समूह D ले 3 का 30 सम्मका गुणाङ्कलाई जनाउँछ, D = {3, 6, 9, 12, 15, 18}

समूह C र D मा कुनै सदस्य साझा छन् ?

पक्कै पनि 15 साझा छ भन्ने पत्ता लगाउनुभयो होला । दुवै समूहमा 15 साझा भएकाले उक्त साझा सदस्यलाई समूह जनाउने वृत्तलाई खप्ट्याएर खप्टिएको भागमा राखी भेनचित्र बनाऔँ :



चित्र (ख) खप्टिएका समूह

चित्रमा 15 दुवै समूहमा परेको छ । यस्तो अवस्थामा C र D लाई खप्टिएका समूह भनिन्छ ।

नोट: खप्टिएका समूहमा कम्तीमा एउटा सदस्य साझा हुन्छ भने एकभन्दा बढी सदस्य पनि साझा हुन सक्छन् ।

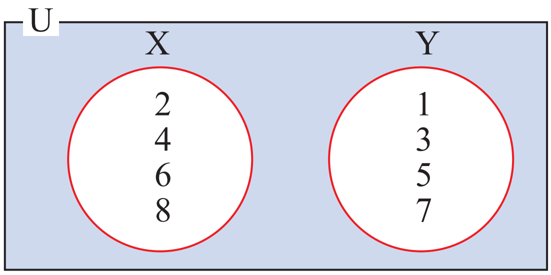
खप्टिएका समूह (Overlapping sets): यदि समूहमा एक वा सोभन्दा बढी सदस्य साझा छन् भने ती समूहलाई खप्टिएका समूह भनिन्छ ।

क्रियाकलाप

तपाईँका दुई जना साथीलाई मन पर्ने कुनै पाँचओटा खानाको नाम भन्न लगाउनुहोस् । पहिलो साथीले मन पराएका खानाको समूहलाई A र दोस्रो साथीले मन पराएका खानाको समूहलाई B ले जनाउनुहोस् । अब A र B अलग्गिएका वा खप्टिएका कस्ता समूह बन्छन् ? भेनचित्र बनाई देखाउनुहोस् ।

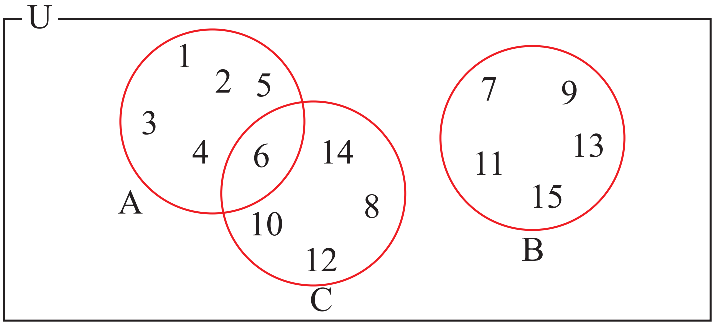
उदाहरण 3. **तलका समूह अलग्गिएका वा खप्टिएका कस्ता समूह हुन् ? कारण दिनुहोस् :**

(क)



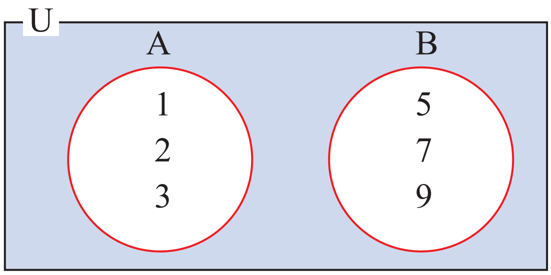
उत्तर: समूह X र Y मा कुनै पनि सदस्य साझा छैनन् । त्यसैले यी समूह अलग्गिएका समूह हुन् ।

(ख)



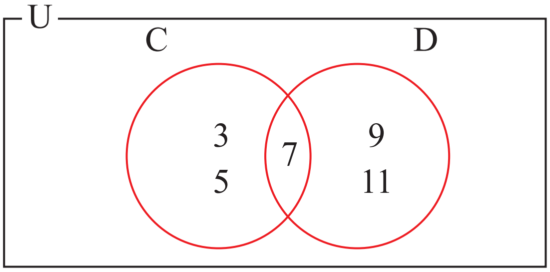
उत्तर: समूह A र B बिचमा कुनै पनि सदस्य साझा छैनन् । त्यसैले A र B अलग्गिएका समूह हुन् । तर समूह A र C बिचमा 6 साझा सदस्य छ । त्यसैले A र C खप्टिएका सदस्य हुन् ।

(ग)



उत्तरः समूह A र B बिच कुनै पनि सदस्य साझा छैनन् । त्यसैले A र B अलग्गिएका समूह हुन् ।

(घ)



उत्तरः समूह C र D खप्टिएका समूह हुन् किनभने ती समूहबिच दुवैको साझा सदस्य 7 छ ।

उदाहरण 4. **समूह A = {x: x, 15 सम्मका पूर्ण सङ्ख्याको समूह र B = {x:x, 30 सम्मका 6 का गुणाङ्कै छन् । यी समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् । समूहलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गरी खप्टिएका वा अलग्गिएका कस्ता समूह हुन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।**

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. दिइएका समूहका आधारमा खप्टिएका वा अलग्गिएका समूह छुट्याउनुहोस् :

A = {2, 4, 6, 8, 10, 12}, B = {1, 3, 5, 7, 9, 11},
C = {0, 1, 3, 5, 7, 11}, D = {5, 6, 7, 8, 10},
E = {0, 2, 9, 12}

(क) A र B (ख) A र C (ग) B र C

(घ) A र D (ङ) A र E (च) B र D

2. **यदि U = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j}, P = {a, b, c, d, e, i}, Q = {a, e, i}, R = {b, c, d, j}, S = {i, e, a} र T = {a, b, c, f, छ भने तलका समूहलाई छुट्टाछुट्टै भेनचित्रमा प्रस्तुत गरी देखाउनुहोस् । साथै अलग्गिएका समूह वा खप्टिएका समूह के हुन्, छुट्याउनुहोस् :**

(क) P र Q (ख) Q र R (ग) Q र S (घ) R र T

3. **यदि A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} छ भए तलका समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् :**

(क) A का प्रत्येक सदस्यमा 1 जोड्दा बन्ने समूह B

(ख) A का प्रत्येक सदस्यलाई 2 ले गुणन गर्दा बन्ने सदस्य समूह C

(ग) A मा भएका बिजोर सङ्ख्याको समूह

(घ) A मा भएका 10 का गुणनखण्डको समूह E

(ङ) माथिको समूहलाई बुझाउने सर्वव्यापक समूह लेख्नुहोस् ।

माथिका समूह A, B, C, D र E मा खप्टिएका र अलग्गिएका समूह छुट्याउनुहोस् ।

4. **यदि : = {x:x एउटा 40 सम्मका 5 को अपवर्त्य भए तलका समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् :**

(क) M का प्रत्येक सदस्यमा 3 जोड्दा बन्ने समूह N

(ख) M का प्रत्येक सदस्यलाई 2 ले गुणन गर्दा बन्ने सदस्य समूह P

(ग) M मा भएका बिजोर सङ्ख्याको समूह Q

(घ) M मा भएका 10 का अपवर्त्यको समूह R

माथिका समूह M, N, P, Q र R मा खप्टिएका र अलग्गिएका समूह छुट्याउनुहोस् ।

एकाइ 2 वास्तविक सङ्ख्या
(Real Numbers)

पाठ 3 पूर्ण सङ्ख्या (Whole Numbers)

सङ्ख्या पद्धतिको परिचय (Introduction of Number System)

सङ्ख्यालाई प्राकृतिक सङ्ख्या, पूर्ण सङ्ख्या भनी वर्गीकरण गर्न जानिसक्नुभएको छ । वस्तु गणना गर्न प्राकृतिक सङ्ख्या प्रयोग हुन्छ भने प्राकृतिक सङ्ख्याको समूहमा शून्य (0) थपेपछि पूर्ण सङ्ख्याको समूह बन्दछ ।

पूर्ण सङ्ख्या 0, 1, 2, ..., 9 गरी जम्मा दशओटा अङ्कले बनेका हुन्छन् । यसरी दशओटा अङ्क प्रयोग गरी गणना गर्ने, हिसाब गर्ने सङ्ख्या पद्धतिलाई दशमलव सङ्ख्या पद्धति भनिन्छ । जुनसुकै हिसाब दशमलव सङ्ख्या पद्धतिबाट गर्न सकिन्छ । दशमलव सङ्ख्या पद्धतिका जुनसुकै सङ्ख्यालाई सङ्ख्याअनुसार एक, दश, सय, हजार, ... गरी सङ्ख्यामा अङ्कको स्थान लेख्ने तरिका पनि हामिलाई थाहा छ । जस्तै : 5421 लाई स्थानमान तलिकामा देखाउँदा :

हजार	सय	दश	एक
5	4	2	1

उक्त सङ्ख्यालाई विस्तारित रूपमा लेख्दा 5000 + 400 + 20 + 1 लेखिन्छ । यसलाई गुणनको रूपमा प्रस्तुत गर्दा,

$$
\begin{aligned}
5421 &= 5 \times 1000 + 4 \times 100 + 2 \times 10 + 1 \\
&= 5 \times 10 \times 10 \times 10 + 4 \times 10 \times 10 + 2 \times 10 + 1 \\
&= 5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^0
\end{aligned}
$$

यहाँ, 10 लाई तीनपटक गुणन गरेको अवस्थालाई जनाउन 10^3 ले जनाइएको छ भने दुई पटक गुणन गरिएकालाई 102, एक पटक गुणन गरिएकालाई 10^1 र 10 ले गुणन गरिएको तर मान 1 नै हुने गरी 10^0 नै लेखिएको छ । $10^0 = 1$ हुन्छ । यो नियम तपाईँले बीजगणितमा अध्ययन गर्नुहुने छ ।

त्यसै गरी, दशमलव पद्धतिमा अर्को कुनै सङ्ख्या 65829 छ भने यसलाई पनि आधार 10 मा राखी घाताङ्कको रूपमा विस्तारित रूपमा लेख्दा 60000 + 5000 + 800 + 10 + 9 लेखिन्छ भने यसलाई 10 आधारमा गुणनको रूपमा प्रस्तुत गर्दा $6 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 2$

$\times 10^1 + 9 \times 10^0$ लेखिन्छ । यसरी आधार 10 मा सङ्ख्यालाई प्रस्तुत गर्ने पद्धति नै दशमलव पद्धति हो । अतः $65829_{10} = 6 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 9 \times 10^0$

दशमलव सङ्ख्या पद्धति (Decimal number system) : दशओटा अङ्क 0, 1, 2, 3, 4, 5 6, 7 8, 9 प्रयोग हुने पद्धति दशमलव सङ्ख्या पद्धति हो । दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा जुनसुकै सङ्ख्यालाई आधार 10 को घाताङ्कले सङ्ख्याका अङ्कलाई गुणन गरी प्रस्तुत गरिन्छ ।

सङ्ख्या पद्धति धेरै खालका हुन्छन् । दशओटा अङ्क प्रयोग हुने दशमलव सङ्ख्या पद्धति भएजस्तै,

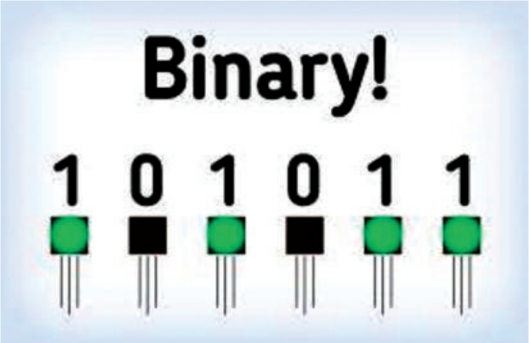
- दुईओटा मात्र अङ्क प्रयोग हुने द्विआधार सङ्ख्या पद्धति
- पाँचओटा मात्र अङ्क प्रयोग हुने पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धति
- आठओटा मात्र अङ्क प्रयोग हुने अष्ठआधार सङ्ख्या पद्धति

कम्प्युटरमा जुनसकै कुरालाई भण्डारण गर्न सङ्ख्याको रूपमा 0 र 1 मा परिवर्तन हुन्छ । यस्तो पद्धति द्विआधार वा दुईओटा मात्र अङ्क प्रयोग हुने पद्धति हो ।

उदाहरणका लागि तपाईँले किबोर्डमा A टाइप गर्नुभयो भने कम्प्युटरले 0100 0001 मा परिवर्तन गर्छ । जुन दशमलव पद्धतिमा 65 हो । यस पाठमा कम्प्युटरले वा जोसुकैले जुनसुकै सङ्ख्यालाई द्विआधार, पञ्चआधार र अष्ठआधारमा कसरी परिवर्तन गर्न सकिन्छ भन्नेबारे चर्चा गरिने छ ।

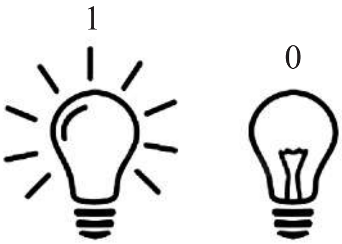
3.1 द्विआधार सङ्ख्या पद्धति (Binary Number System)

हामीले कम्प्युटरको किबोर्डमा जे सुकै टाइप गरे पनि कम्प्युटरले 0 र 1 मा परिवर्तन गरी भण्डारण गर्छ । कम्प्युटरमा हजारौँको सङ्ख्यामा ट्रान्जिस्टर हुन्छन् । ती ट्रान्जिस्टरमा एक जनाउन बोर्ड् प्रवाह हुन्छ भने शून्य जनाउन बोर्ड प्रवाह हुँदैन । यही पद्धतिबाट कम्प्युटरमा द्विआधार पद्धतिमा सङ्ख्याको भन्डारण हुन्छ ।



ट्रन्जिस्टरले 101011 लाई भण्डारण गर्दा 1 लाई बोर्ड प्रवाह भएको वा बलेको ट्रन्जिस्टर र शून्यलाई नबलेको ट्रन्जिस्टरले जनाउँछ । माथिको चित्रले 101011 जनाएको छ । यो द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिको सङ्ख्या हो किनभने यसमा सङ्ख्या जनाउन केवल दुईओटा अङ्क 1 र 0 प्रयोग भएका छन् । यस्ता द्विआधार सङ्ख्या लेख्दा 1010112 लेखिन्छ । तल झुन्डाइएको 2 ले द्विआधार भन्ने बुझाउँछ ।

यहाँ बोडोय सर्किट यल गर्दा बत्ती बल्ने र याा गर्दा बत्ती निभ्ने हुन्छ । यसलाई पनि क्रमशः सङ्केत 1 र 0 ले जनाउन सकिन्छ ।



क्रियाकलाप

द्विआधार पद्धतिका सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

तलको तालिकामा दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा 120 सम्म देखाइएको छ । यी सङ्ख्यामा 0 र 1 मात्र प्रयोग भएका सङ्ख्या कुन कुन छन् ? गोलो लगाउनुहोस् ।

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76
77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98
99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120

के तपाईंले छाया पारेका सङ्ख्यामा मात्र गोलो लगाउनुभयो ?

माथिको तालिकामा छाया पारेका मात्र सङ्ख्या मात्र द्विआधार पद्धतिमा लेख्न सकिन्छ किनकि यी सङ्ख्यामा 0 वा 1 मात्र छन् । त्यसैले द्विआधार पद्धतिका सङ्ख्या 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, ... हुँदै जान्छन् । जसले 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... जनाउँछन् । यी सङ्ख्याको मान द्विआधार पद्धतिमा कति हुन्छ हेरौँ :

दशमलव पद्धति	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
द्विआधार पद्धति	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

अब, तपाईंले 20 सम्म जनाउने द्विआधार सङ्ख्या लेख्न सक्नुहुन्छ ? माथिको तालिकाबाट ढाँचा पत्ता लगाई तलको खाली ठाउँमा लेख्नुहोस् :

....

....

....

....

द्विआधार सङ्ख्या पद्धति र यसको विस्तार Binary number system and its expansions

जसरी दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा एक, दश, सय, हजार, ... हुन्छ ठिक त्यसरी नै द्विआधार पद्धतिमा एक, दुई, चार, आठ, सोह्र, बत्तिस ... हुँदै जान्छ। दिइएका सङ्ख्यालाई द्विआधार स्थानमान तालिकामा कसरी देखाउने होला, छलफल गर्नुहोस्।

द्विआधार पद्धतिमा स्थानमान तालिकालाई निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ :

सोह्र	आठ	चार	दुई	एक
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

प्रस्तुत तालिकाको प्रयोगले द्विआधार सङ्ख्यालाई विस्तारित रूपमा लेख्न सकिन्छ :

द्विआधार पद्धतिमा विस्तार	दशमलव पद्धतिमा सङ्ख्या
$1_2 = 1 \times 2^0$	$= 1$
$10_2 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$	$= 2 + 0 = 2$
$11_2 = 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$	$= 2 + 1 = 3$
$100_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$	$= 4 + 0 + 0 = 4$
$101_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$	$= 4 + 0 + 1 = 5$

माथिको तालिकामा $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$ राखेर हिसाब गरिएको छ।

निष्कर्षः दशमलव सङ्ख्या पद्धतिअनुसारको स्थानमान तालिकामा एक, दश, सय, हजार, ... वा 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, ...। लेखिए जस्तै द्विआधार पद्धतिअनुसार स्थानमान तालिकामा एक, दुई, चार, आठ, सोर, ... वा 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, ... हुन्छ । द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा सङ्ख्यालाई 2 को घात प्रयोग गरी लेखिन्छ । द्विआधार सङ्ख्यालाई जनाउन सङ्ख्याको पछाडि आधारमा सानो अक्षरमा 2 लेखिन्छ । जस्तै : 101_2, 111_2 ......

दशमलव सङ्ख्या पद्धतिबाट द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिका रूपान्तरण (Conversion from decimal number system to binary number system)

27 लाई आधार 2 को घातको समूहमा विभाजन गर्नुहोस् । ती दुई प्रक्रियाबिचको तुलना गर्नुहोस् :

सोह्र	आठ	चार	दुई	एक
24	23	22	21	20
1	0	1	1	1

स्थानमान तालिकामा,

यहाँ,

$27 = 16 + 8 + 0 + 2 + 1$

$= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$\therefore 27 = 1 \times 16 + 1 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1$

$= 11011^2$

दुवै प्रक्रियामा पहिला 2 को घातका रूपमा लेख्न सकिने र बाँकी सङ्ख्यामा 27 लाई टुक्र्‍याइएको छ । त्यसपछि ती सङ्ख्यालाई 2 को घाताङ्कको समूहमा लेखिएको छ ।

माथि छलफल गरिएको क्रियाकलापका आधारमा के दशमलव सङ्ख्या 27 लाई द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा यसरी बदल्न सकिन्छ ? अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस् ।

		शेष	
2	27	1	← 2 ले 27 लाई भाग गर्दा 13 भागफल र 1 शेष रह्यो ।
	13	1	← 2 ले 13 लाई भाग गर्दा 1 शेष रह्यो ।
	6	0	← 2 ले 6 लाई भाग गर्दा 0 शेष रह्यो ।
	3	1	← 2 ले 3 लाई भाग गर्दा 1 शेष रह्यो ।
	1	1	← 2 ले 1 लाई भाग गएन । त्यसैले गर्दा 1 रह्यो ।

अब शेषलाई क्रमशः तलबाट माथिको क्रममा लेख्दा 11011 हुन्छ ।

तसर्थ $27 = 11011_2$ लेखिन्छ ।

दशमलव सङ्ख्या पद्धतिबाट द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर्दा दशमलवमा भएको सङ्ख्यालाई 2 ले भाग गर्दै जाने र भागफलमा 0 नआएसम्म भाग गरिरहनुपर्छ । अनि शेषलाई दायाँतर्फ लेख्दै जानुपर्छ र अन्त्यमा तलपट्टिबाट माथितिर क्रमशः शेषलाई मिलाएर लेख्नुपर्छ ।

द्विआधार पद्धतिको सङ्ख्या 1001012 लाई तलको स्थानमान तालिकामा देखाइएको छ । स्थानमान तालिकाको अध्ययन गरी दिइएका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :

	बत्तिस	सोह्र	आठ	चार	दुइ	एक
स्थान	32	16	8	4	2	1
	25	24	23	22	21	20
द्विआधार सङ्ख्या	1	0	0	1	0	1

(क) के 100000_2 लाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा 32 लेख्न सकिन्छ, कसरी ?

(ख) 101_2 लाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा कसरी लेखिन्छ ?

(ग) के द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा 00101_2 लेख्न सकिन्छ ? यसको मान दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा कसरी लेखिन्छ ?

(घ) 1001012 लाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा कसरी लेखिन्छ ?

यहाँ 1001012 लाई 2 को घात प्रयोग गरी विस्तारित रूपमा लेख्दा,

$100101_2 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 1 \times 32 + 0 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1$ अब दशमलव सङ्ख्या पद्धतिअनुसार लेख्दा,

$32 + 4 + 1 = 37$ हुन्छ । तर आधार 10 लेख्ने गरिँदैन ।

$\therefore 100101_2 = 37$

> द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिलाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नका लागि 2 को घात प्रयोग भएको विस्तारित रूपमा लेखी त्यसको सरल गर्नुपर्छ ।

उदाहरण

तलका द्विआधार सङ्ख्यालाई दशमलव पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

(क) 1011_2 (ख) 1101101_2

समाधान

(क) 10112 $= 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 8 + 0 + 2 + 1$

$= 11$

$\therefore$ 10112 $= 11$

(ख) $1101101_2 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 64 + 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1$

$= 109$

$\therefore$11001012 $= 109$

3.2 पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धति (Quinary Number System)

क्रियाकलाप

तलको तालिकामा दशमलव सङ्ख्या पद्धतिका सङ्ख्या देखाइएको छ । तर पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा 0, 1, 2, 3, 4 मात्र पाँचओटा अङ्क प्रयोग हुने हुनाले पञ्चआधार सङ्ख्या

पद्धतिका सङ्ख्यालाई छाया पारेर देखाइएको छ :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76
77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98
99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120

माथिको तालिकाबाट केवल 0, 1, 2, 3 र 4 प्रयोग भएका सङ्ख्या के के छन् ? तलको तालिका पूरा गर्नुहोस् :

दशमलव पद्धति	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
पञ्चआधार पद्धति	0	1	2	3	4	10	11	12	13	14	20
दशमलव पद्धति	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**
पञ्चआधार पद्धति	21	22	23	24	30	31	32	33	34	40	41
दशमलव पद्धति	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**
पञ्चआधार पद्धति	42										
दशमलव पद्धति											
पञ्चआधार पद्धति											

दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा 10 ओटा अङ्क प्रयोग भएजस्तै पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा 0, 1, 2, 3 र 4 गरी पाँचओटा मात्र अङ्क प्रयोग गरी सङ्ख्या बनेका हुन्छन् । पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा सङ्ख्यालाई क्रमशः गन्ती गर्दा 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20,..... हुन्छ ।

दशमलव पद्धतिको सङ्ख्यालाई पञ्चआधार पद्धतिमा रूपान्तरण
Convertion of decimal number system to quinary number system

हामीले दशमलव पद्धतिको सङ्ख्यालाई द्विआधार पद्धतिको सङ्ख्यामा रूपान्तरण गर्दा दशमलव पद्धतिको सङ्ख्यालाई 2 ले भाग गर्दा प्राप्त हुने शेषसङ्ख्या लेख्दा द्विआधार पद्धतिको सङ्ख्या बन्नेबारे जानिसकेका छौँ । ठिक त्यसै गरी दशमलव पद्धतिको सङ्ख्यालाई पञ्चआधार पद्धतिमा रूपान्तरण गर्न के गर्नुपर्छ ? अनुमान लगाउनुहोस् त ।

पक्कै पनि तपाईँले दशमलव पद्धतिको सङ्ख्यालाई 5 ले भाग गरी शेष मात्र लेख्नेबारे सोच्नुभएको होला । हामीले यही तरिकाले पञ्चआधारमा रूपान्तरण गर्न सक्दछौँ । एउटा उदाहरण हेरौँ :

उदाहरण 1

465 लाई पञ्चआधार पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

समाधान : दशमलव पद्धतिको सङ्ख्या 465 लाई पञ्चआधार पद्धतिमा रूपान्तरण गर्दा 5 ले भाग गरौँ :

		शेष	
5	465	0	← 5 ले 465 लाई भाग गर्दा 93 भागफल र 0 शेष रह्यो ।
	93	1	← 5 ले 93 लाई भाग गर्दा 13 भागफल र 1 शेष रह्यो ।
	18	3	← 5 ले 18 लाई भाग गर्दा 3 भागफल र 1 शेष रह्यो ।
	3	3	← 5 ले 3 लाई भाग जाँदैन । त्यसैले शेषमा 3 शेष रह्यो ।

अब, पञ्चआधार पद्धतिमा 3310 भयो । त्यसैले, दशमलव पद्धतिको सङ्ख्या 465 = 3310_5 (पञ्चआधार पद्धति) ।

लेख्ने तरिका: $465_{10} = 3310_5$

फेरि, पञ्चआधार पद्धतिको सङ्ख्या 3310_5 लाई दशमलव पद्धतिमा रूपान्तरण गर्दा 465 नै कसरी आउँछ, तलको अनुच्छेद पढौँ :

दशमलव पद्धतिको सङ्ख्यालाई एक, दश, सय, हजार, ... को स्थानमा राखे जस्तै पञ्चआधार पद्धतिको सङ्ख्यालाई एक, पाँच, पच्चिस, एकसय पच्चिस, ... हुँदै जान्छ । त्यसैले 3310_5 लाई पाँचको घातमा राखी दशमलव पद्धतिमा निम्नअनुसार रूपान्तरण गर्न सकिन्छ :

	एकसय पच्चिस	**पच्चिस**	**पाँच**	**एक**
स्थान	125	25	5	1
घाताङ्कको रूपमा	53	52	51	50
पञ्चआधार सङ्ख्या	3	3	1	0

माथिको तालिकाबाट पञ्चआधार सङ्ख्या 2310 लाई दशमलव पद्धतिमा बदल्दा तल देखाइएजस्तै प्रक्रिया गरिन्छः

$$23105 = 3 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 0 \times 5^0$$

$$= 3 \times 125 + 3 \times 25 \times 1 \times 5 + 0 \times 1$$

$$= 375 + 75 + 5 + 0$$

$$= 465$$

अतः $2310_5 = 465_{10}$

उदाहरण 2

द्विआधार पद्धतिमा रूपान्तर गर्नुहोस्: 32710

समाधान : दिइएको सङ्ख्या 327_{10} मा आधार 10 भएकाले यो सङ्ख्या दशमलव पद्धतिको सङ्ख्या हो । दशमलव पद्धतिको सङ्ख्यालाई द्विआधार पद्धतिमा रूपान्तर गर्दा सो सङ्ख्यालाई 2 ले भाग गरी शेषमात्र लेखिन्छ ।

		शेष	
5	327	1	← 2 ले 327 लाई भाग गर्दा 163 भागफल र 1 शेष रह्यो ।
	163	1	← 2 ले 163 लाई भाग गर्दा 81 भागफल र 1 शेष रह्यो ।
	81	1	← 2 ले 81 लाई भाग गर्दा 40 भागफल र 1 शेष रह्यो ।
	40	0	← 2 ले 40 लाई भाग गर्दा 20 भागफल र 0 शेष रह्यो ।
	20	0	← 2 ले 20 लाई भाग गर्दा 10 भागफल र 0 शेष रह्यो ।
	10	0	← 2 ले 10 लाई भाग गर्दा 5 भागफल र 0 शेष रह्यो ।
	5	0	← 2 ले 5 लाई भाग गर्दा 2 भागफल र 0 शेष रह्यो ।
	2	0	← 2 ले 2 लाई भाग गर्दा 1 भागफल र 0 शेष रह्यो ।
	1	1	← 2 ले 1 लाई भाग गएन । त्यसैले 1 शेष रह्यो ।
	0		

अव, शेष मात्र तलबाट माथितिर लेख्दै जाँदा 101000111 भयो । अतः 32710 = 1010001112

अत दशमलव सङ्ख्या 327 को द्विआधार सङ्ख्या 101000111 हुन्छ ।

उदाहरण 3

1010112 लाई दशमलव पद्धतिको सङ्ख्यामा बदल्नुहोस् :

समाधान : द्विआधार पद्धतिको सङ्ख्यालाई त्यसको स्थानमान तालिकामा राख्दाः

	बत्तिस	सोह्र	आठ	चार	दुइ	एक
स्थान	32	16	8	4	2	1
	25	24	23	22	21	20
द्विआधार सङ्ख्या	1	0	1	0	1	1

यस तालिकाका आधारमा दशमलव पद्धतिमा वदल्न विस्तारित रूपमा लेख्दा,

$1010112 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 1 \times 32 + 0 \times 16 + 1 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1$

$= 32 + 0 + 8 + 2 + 1$

$= 43$

अतः $101011_2 = 43_{10}$

उदाहरण 4

40135 लाई दशमलव पद्धतिमा रूपान्तर गर्नुहोस् :

समाधान : पञ्चआधार पद्धतिको सङ्ख्या 4517 लाई दशमलव पद्धतिमा वदल्दा सङ्ख्यालाई पञ्चआधार पद्धतिको स्थानमान तालिकामा राखौँ :

	एक सय पच्चिस	पच्चिस	पाँच	एक
स्थान	125	25	5	1
	53	52	51	50
पञ्चआधार सङ्ख्या	4	0	1	3

अब, पञ्चआधार सङ्ख्या 4517 लाई दशमलव पद्धतिको सङ्ख्यामा लैजाँदा,

$45175 = 4 \times 53 + 0 \times 52 + 1 \times 51 + 3 \times 50$

$= 4 \times 125 + 0 \times 25 + 1 \times 5 + 3 \times 1$

$= 500 + 0 + 5 + 3$

$= 508$

अतः $45175 = 50810$

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. तलका सङ्ख्या कुन सङ्ख्या पद्धतिमा छन्, लेख्नुहोस् :

(क) 1011_2 (ख) 570 (ग) 1112

(घ) 30_5 (ङ) 765 (च) 132

(छ) 1001111_2 (ज) 32312345_5 (झ) 4023_5

2. दिइएका दशमलव पद्धतिको सङ्ख्यालाई द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा बदल्नुहोस् :

(क) 3 (ख) 7 (ग) 10 (घ) 16 (ङ) 85

(च) 105 (छ) 438 (ज) 999 (झ) 8064 (ञ) 9294

3. तलका प्रत्येक द्विआधार सङ्ख्यालाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

(क) 10_2 (ख) 11_2 (ग) 101_2 (घ) 1110_2

(ङ) 10111_2 (च) 11101_2 (छ) 10110_2 (ज) 10110_2

(झ) 100101_2 (ञ) 111101_2 (ट) 1100000_2 (ठ) 1000000_2

4. तलका प्रत्येक दशमलव पद्धतिका सङ्ख्यालाई पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

(क) 8 (ख) 11 (ग) 45 (घ) 89 (ङ) 99 (च) 103

(छ) 540 (ज) 112 (झ) 304 (ञ) 888 (ट) 941 (ठ) 5078

5. तलका प्रत्येक पञ्चआधार सङ्ख्यालाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

(क) 115 (ख) 245 (ग) 315 (घ) 1215 (ङ) 1435

(च) 4015 (छ) 4445 (ज) 4315 (झ) 43415 (ञ) 333335

6. (क) सङ्ख्या 1012 र 305 मा कुन ठुलो छ ? साथै तिनीहरूको फरक पनि निकाल्नुहोस् ।

(ख) सङ्ख्या 110112 र 1245 मा कुन ठुलो छ ? साथै तिनको फरक पनि निकाल्नुहोस् ।

परियोजना कार्य

(क) तपाईँका बुबाको एक महिनाको आम्दानी कति छ ? बुबालाई सोध्नुहोस् । सो आम्दानी रकमलाई द्विआधार र पञ्चआधार पद्धतिमा रूपान्तर गर्नुहोस् ।

(ख) कम्प्युटरमा द्विआधार सङ्ख्या किन प्रयोग गरिन्छ ? यसबारे इन्टरनेटमा खोजी गरी एउटा लेख तयार गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) Binary, (ख) Decimal, (ग) Binary, (घ) Quinary, (ङ) Decimal, (च) Decimal, (छ) Binary, (ज) Quinary, (झ) Quinary
2. (क) 210, (ख) 310, (ग) 510, (घ) 1410, (ङ) 2310, (च) 2910, (छ) 2210, (ज) 2210, (झ) 3710, (ञ) 6110, (ट) 9610, (ठ) 6410
3. (क) 135, (ख) 215, (ग) 1405, (घ) 3245, (ङ) 3445, (च) 4135, (छ) 23105, (ज) 10225, (ञ) 12045, (ट) 111335, (ठ) 132415, (ड) 313035
4. (क) 810, (ख) 1110, (ग) 3510, (घ) 8910, (ङ) 9410, (च) 10810, (छ) 38510, (ज) 21210, (झ) 25910, (ञ) 118810, (ट) 224110, (ठ) 248310

पाठ 4 आनुपातिक र अनानुपातिक सङ्ख्या (Rational and Irrational Numbers)

आनुपातिक सङ्ख्या

हामीले सङ्ख्याका समूहलाई जनाउने बारेमा केही अध्ययन गरिसकेका छौँ :

(क) प्राकृतिक सङ्ख्याको समूह, N = {1, 2, 3, 4 … }, सबै गन्तीका सङ्ख्या हुन् ।

(ख) पूर्ण सङ्ख्याको समूह, W = {0, 1, 2, 3, 4, …}, सबै गन्तिका सङ्ख्या र शून्य पनि हो ।

(ग) पूर्णाङ्कहरूको समूह, Z = {…, -2, -1, 0, 1, 2, …}, सबै ऋणात्मक र धनात्मक सङ्ख्या हुन् ।

माथिका सबै सङ्ख्यालाई एउटा सङ्ख्याले त्यही वा अन्य सङ्ख्यालाई भाग गर्दा आउने सङ्ख्या कस्तो बन्छन्, हेरौँ :

$$\frac{1}{1}, \frac{-2}{3}, \frac{4}{2}, \frac{-5}{5}, \frac{7}{3}, \frac{5}{10}, \frac{10}{5}$$

- माथिका सङ्ख्याको भागफल :

  $\frac{1}{1} = 1$ पूर्णसङ्ख्या आयो ।

- $\frac{-2}{3} = -0.66666666\ldots$ दशमलवपछि एउटै अङ्क दोहोरियो ।
- $\frac{4}{2} = 2$ निशेष भाग गयो ।
- $\frac{5}{5} = 1$ निशेष भाग गयो ।
- $\frac{7}{3} = 2.3333333\ldots$ दशमलवपछि एउटै अङ्क दोहोरियो ।
- $\frac{10}{5} = 0.5$ दशमलव अन्त्य भो ।
- $\frac{10}{5} = 2$ निशेष भाग गयो ।

माथिका सबै सङ्ख्या कि त भाग गर्दा निःशेष भाग गएको छ, कि भने दशमलवपछि एउटै सङ्ख्या दोहोरिएको छ । यी सबै सङ्ख्यालाई आनुपातिक सङ्ख्या भनिन्छ । अनुपात भनेको अंश र हरमा देखाइएको सङ्ख्या हो । त्यसैले जुनसुकै सङ्ख्या जसलाई हर र अंशमा देखाउन सकिन्छ तथा भाग गर्दा तीनओटा अवस्था आउँछ :

- निःशेष भाग जाने
- दशमलवपछि एउटै अङ्क दोहोरिने
- दशमलव टुङ्गिने

यस्ता सबै सङ्ख्यालाई आनुपातिक सङ्ख्या भनिन्छ । त्यसैले, आनुपातिक सङ्ख्या माथिका तीन अवस्था पूरा गर्ने सबै सङ्ख्या हुन् । यदि अंशलाई a र हरलाई b भन्ने हो भने $\frac{a}{b}$ को रूपमा देखाउन सकिने सबै सङ्ख्या आनुपातिक सङ्ख्या हुन् जसमा b शून्य हुनु हुँदैन र a पूर्णसङ्ख्या हुनुपर्छ ।

आनुपातिक सङ्ख्या: त्यस्तो सङ्ख्या हो जसलाई $\frac{a}{b}$ को रूपमा देखाउन सकिन्छ जसमा $b \neq 0$, a र b दुवै पूणाङ्क हुन् ।

आनुपातिक सङ्ख्याका गुण र उदाहरण

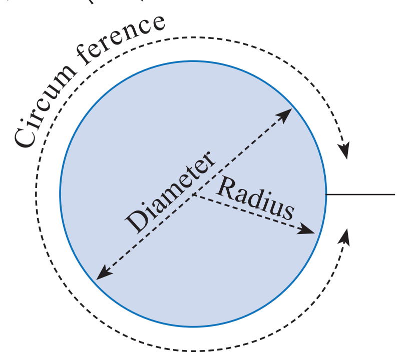
- सबै पूर्णसङ्ख्या र प्राकृतिक सङ्ख्या आनुपातिक सङ्ख्या हुन् । जस्तै : 5 एउटा प्राकृतिक सङ्ख्या हो । यसलाई अनुपातमा लेख्न सकिन्छ । $5 = \frac{10}{2}$
- सबै पूर्णाङ्क आनुपातिक सङ्ख्या हुन् । जस्तै : – 6 एउटा पूणाङ्क हो । यसलाई $\frac{-18}{3}$ को रूपमा देखाउन सकिन्छ । त्यसैले – 6 एउटा आनुपातिक सङ्ख्या हो ।
- पूर्णाङ्कका सबै भिन्नहरू आनुपातिक सङ्ख्या हुन् । जस्तै : $\frac{4}{4}$ पनि आनुपातिक सङ्ख्या हो किनकि यसको मान 0.571428571428571428 हुन्छ जसमा दशमलवपछि 571428 दोहोरिइरहन्छ । यस्तो दोहोरिने सङ्ख्यालाई लेख्दा $\frac{4}{7} = 0.\overline{571428}$ लेखिन्छ ।

तर केही सङ्ख्याको दशमलवपछि कुनै पनि अङ्क नदोहोरिने र नटुङ्गिने खालका पनि हुन्छन् । ती सङ्ख्यालाई अनानुपातिक सङ्ख्या भनिन्छ । यसपछि अनानुपातिक सङ्ख्याका बारेमा छलफल गरौँ ।

अनानुपातिक सङ्ख्या (Irrational Numbers)

अनानुपातिक सङ्ख्या कस्ता हुन्छन् र कसरी बन्छन् भन्नेबारे तलको उदाहरण हेर्नुहोस् :

(क) जुनसुकै वृत्ताकार वस्तुको परिधि (Circumference) लाई त्यसको व्यास (Diameter) को लम्बाइले भाग गर्दा सधै 3.14159... आउँछ र यो दशमलवपछि कहिलै पनि टुङ्गिँदैन । यस्तो अनुपात जनाउने सङ्ख्यालाई π ले जनाइन्छ ।



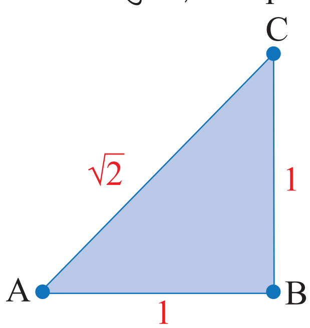
$$\frac{4}{7}=\pi=3.14159...$$

π = 3.14159... नटुङ्गिने दशमलव हो ।

हामीले यसरी वृत्तको परिधि (circumference) र व्यास (Diameter) दुवै पूर्णाङ्क हुने गरी वृत्त बनाउन नै सकिँदैन । त्यसैले यस्ता सङ्ख्यालाई पूर्णाङ्कको अंश र हर बनाउन नै सकिँदैन । त्यसैले यी अनुपातबाट आउने दशमलव अनन्तसम्म दोहोरिइन्छ ।

(ख) लम्ब र आधार 1 से.मि. भएको समकोणी त्रिभुज लिऔँ ।

सो त्रिभुजमा पाइथागोरस साध्यअनुसार, $h^2 = p^2 + b^2$ हुन्छ ।



माथिको चित्रमा, लामो भुजा कर्ण हो । यसको लम्बाइको वर्ग $h^2 = 1^2 + 1^2$ हुन्छ । जसलाई

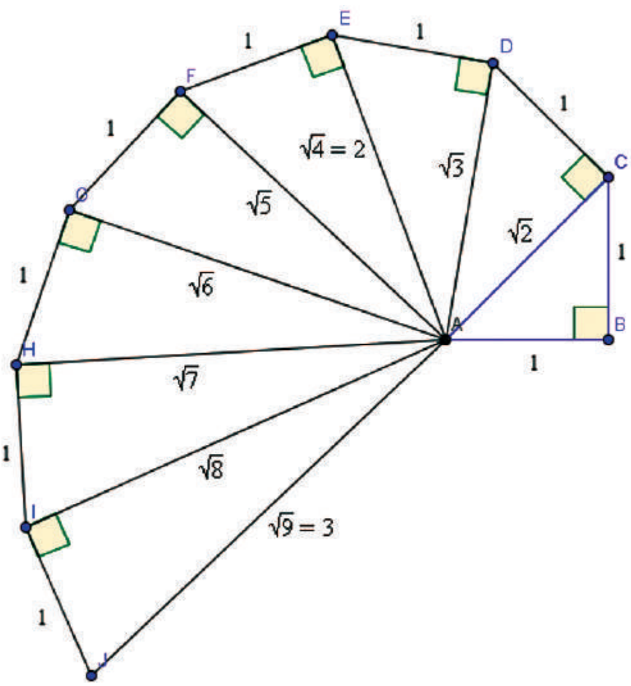
$h = \sqrt{2}$ लेखिन्छ । यो $\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$ अन्तहिन दशमलव हो ।

माथिको उदाहरणमा π र $\sqrt{2}$ दुवै अन्तहिन दशमलव हुन् । यस्ता सङ्ख्यालाई अनानुपातिक सङ्ख्या भनिन्छ ।

यस्ता अनानुपातिक सङ्ख्या धेरै हुन्छन् । जस्तै : $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ यसका उदाहरण हुन् । यी सङ्ख्यालाई पूर्णाङ्कको अनुपात $\frac{a}{b}$ को रूपमा व्यक्त गर्न सकिँदैन ।

क्रियाकलाप

तलको चित्रमा अनानुपातिक सङ्ख्या कुन कुन हुन् ? छुट्याउनुहोस् :



माथिको चित्रमा बनेका अनानुपातिक सङ्ख्या :

(क) .... (ख) ....

(ग) .... (घ) ....

(ङ) .... (च) ....

माथिको चित्रमा बनेका आनुपातिक सङ्ख्या

(क) .... (ख) ....

विचारणीय प्रश्नः गणितमा $\sqrt{\ }$ चिह्नले के जनाउँछ ? के यो चिह्न हुँदैमा कुनै पनि सङ्ख्या अनानुपातिक हुन्छ ?

उत्तरः गणितमा $\sqrt{\ }$ चिह्नले वर्गमूल जनाउँछ। वर्गमूल भनेको कुनै पनि सङ्ख्यालाई दुईओटा समान गुणनखण्ड भएमा एउटा गुणनखण्ड लिने भन्ने जनाउँछ।

जस्तै : $\sqrt{4} = \sqrt{2 \times 2} = \sqrt{2^2} = 2 - \sqrt{\ }$ चिह्नभित्र दुईओटा 2 गुणन भई 2^2 भयो। त्यसैले एउटा 2 उत्तर भयो। अतः 2 आनुपातिक सङ्ख्या भएकाले : $\sqrt{4}$ पनि आनुपातिक सङ्ख्या हो।

अर्को उदाहरणः $\sqrt{8}$

$= \sqrt{2 \times 2 \times 2}$ 8 को खण्डीकरण गरेको

$= \sqrt{2^2 \times 2}$ 2×2 लाई वर्गको रूपमा लेखेको। एउटा 2 लाई वर्ग पुगेन

$= 2\sqrt{2}$ $\sqrt{2^2} = 2$ हुन्छ। यसलाई $\sqrt{2^2}$ को वर्गमूल 2 भनिन्छ। एउटै 2 वर्गमूल गर्न नसकिएको हुनाले $\sqrt{\ }$ भित्र नै लेखियो। $\sqrt{2}$ अनानुपातिक सङ्ख्या भएकाले $2\sqrt{2}$ पनि अनानुपातिक सङ्ख्या नै हो।

अतः $\sqrt{8}$ एउटा अनानुपातिक सङ्ख्या हो।

अनानुपातिक सङ्ख्याका विशेषता Characteristics of irrational numbers

(क) अनानुपातिक सङ्ख्यामा आनुपातिक सङ्ख्या जोड्दा पुनः अनानुपातिक सङ्ख्या बन्छ। जस्तै : $\sqrt{5}$ एउटा अनानुपातिक सङ्ख्या हो। यसमा कनै एउटा आनुपातिक सङ्ख्या 3 जोडौँ। अव $3 + \sqrt{5}$ अनानुपातिक सङ्ख्या हो।

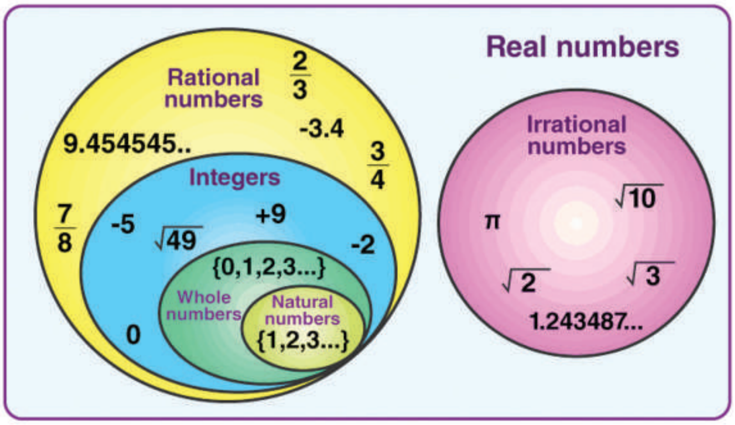
(ख) वर्गसङ्ख्या 1, 4, 9, 14, 25 ... बाहेकका जुनसुकै सङ्ख्याको वर्गमूल अनानुपातिक सङ्ख्या हुन्छ। जस्तै : $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}$ आदि।

(ग) जुनसुकै रूढ सङ्ख्याको वर्गमूल अनानुपातिक सङ्ख्या हो।

सङ्ख्याको सम्बन्ध

- सबै प्राकृतिक सङ्ख्या (natural numbers, N) पूर्ण सङ्ख्या (Whole number, W) पनि हुन् ।
- सबै पूर्ण सङ्ख्या पूर्णाङ्क (Integer, Z) पनि हुन् ।
- सबै पूर्णाङ्क आनुपातिक सङ्ख्या (Rational numbers, Q) पनि हुन् ।
- अनानुपातिक सङ्ख्या (Irrational numbers, Q') माथिका कुनै पनि सङ्ख्या होइनन् ।
- अनानुपातिक सङ्ख्या र आनुपातिक सङ्ख्या दुवैलाई एउटै नाममा वास्तविक सङ्ख्या (Real numbers, R) भनिन्छ ।

माथिको भनाइलाई चित्रमा हेरौँ :



अभ्यासका लागि प्रश्न

1. ठिक बेठिक छुट्याउनुहोस् :

(a) सबै पूर्ण सङ्ख्या आनुपातिक सङ्ख्या हुन् ।

(b) आनुपातिक सङ्ख्यालाई $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ को रूपमा व्यक्त गर्न सकिँदैन ।

(c) प्राकृतिक सङ्ख्या आनुपातिक सङ्ख्या हैनन् ।

(d) रूढ सङ्ख्याको वर्गमूल अनानुपातिक सङ्ख्या हो ।

(e) वृत्तको परिधिलाई व्यासको लम्बाइले भाग गर्दा आउने मान अनानुपातिक सङ्ख्या हो ।

(f) π आनुपातिक सङ्ख्या हो ।

2. तलका प्रश्नको जवाफ दिनुहोस् :

(a) आनुपातिक सङ्ख्या भनेको के हो ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।

(b) अनानुपातिक सङ्ख्या भनेको के हो ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।

(c) वास्तविक सङ्ख्या भनेको के हो ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।

(d) के प्राकृतिक सङ्ख्या आनुपातिक सङ्ख्या हुन् ? आफ्नो उत्तर उदाहरणसहित प्रस्ट पार्नुहोस् ।

3. तलका सङ्ख्या आनुपातिक वा अनानुपातिक के हुन् लेख्नुहोस् ।

a. 5 b. $\sqrt{5}$ c. $\sqrt{9}$

d. 2 + 5 e. $\sqrt{2}$ f. $2 + \sqrt{2}$

g. $2\sqrt{3}$ h. $-\frac{5}{4}$ i. $\frac{9}{3}$

4. तलका दशमलव सङ्ख्यालाई आनुपातिक सङ्ख्याको रूपमा अंश र हरको रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् :

a. 2.5 b. 3.82 c. 4.21 d. 9.34521

5. तलका सङ्ख्या कुन कुन अनानुपातिक हुन् ? दशमलवपछिका अङ्कको ढाँचा हेरी लेख्नुहोस् :

a. 1.4142135623731…

b. 0.8

c. 3.142857143…

d. 6.374374374...

e. 4.234

5. आनुपातिक र अनानुपातिक सङ्ख्याबिचको भिन्नता उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।

परियोजना कार्य

परियोजना कार्य: आनुपातिक सङ्ख्या र अनानुपातिक सङ्ख्या जनाउने भेनचित्र बनाई वास्तविक सङ्ख्या देखाउने चार्ट तयार गर्नुहोस् ।

उत्तर

4. (a) $\frac{25}{10}$ (b) $\frac{382}{100}$ (c) $\frac{421}{100}$ (d) $\frac{934521}{100000}$

5. (b), (d), (e) किनकि यी सङ्ख्या अन्तन हुने वा नदोहोरिने दशमलव हुन् ।

पाठ 5 सङ्ख्याको वैज्ञानिक सङ्केत (Scientific Notation of Numbers)

परिचय

हामी ससाना नाप मिटर, सेन्टिमिटर, किलोमिटरमा लेख्छौँ । जस्तै : एउटा किताबको लम्बाइ 22 इन्च, रामको उचाइ 5 फिट, गीताको उचाइ 5.1 फिट, घरदेखि विद्यालय सम्मको दुरी 2 किलोमिटर आदि । के हामी सबै दुरी यसरी नै भन्न सक्छौँ त ? विचार गरौँ :

- पृथ्वी देखि चन्द्रमासम्मको दुरी 384,400,000 मिटर
- पृथ्वीदेखि सूर्यसम्मको दुरी 149,597,870,700 मिटर
- ग्यालेक्सीको व्यास करिब 950000000000000000000 मिटर
- पृथ्वीको तौल = 5,972,000,000,000,000,000,000,000 किलोग्राम
- हाइड्रोजन परमाणुको तौल = 0.000,000,000,000,000,000,000,000,001,673 kg

यती ठुला दुरीलाई सहज तरिकाले लेख्न वैज्ञानिक सङ्केत प्रयोग गरिन्छ । वैज्ञानिक सङ्केत के हो र कसरी लेखिन्छ भन्नेबारे यसभन्दा तल व्याख्या गरिन्छ ।

सङ्ख्याको वैज्ञानिक सङ्केत (Scientific notation of numbers)

तलका सङ्ख्यालाई वैज्ञानिक सङ्केतमा लेखेका उदाहरण हेरौँ :

$340000000 = 3.4 \times 10^8$

$5420000000 = 5.42 \times 10^9$

$50500000 = 5.05 \times 10^7$

$0.000000097 = 9.7 \times 10^{-8}$

$0.0000212 = 2.12 \times 10^{-5}$

यी वैज्ञानिक सङ्केत कसरी लेख्न सकिन्छ चर्चा गरौँ :

(क) पूर्णाङ्क भएमा

यदि कुनै सङ्ख्या पूर्णाङ्क हो भने त्यसलाई वैज्ञानिक सङ्केतमा व्यक्त गर्दा दिइएको सङ्ख्यालाई पहिलो अङ्क भन्दा पछाडि दशमलव राखी दोस्रो अङ्कदेखि कतिओटा अङ्क छन् त्यति 10 को घाताङ्क लेख्ने ।

जस्तै माथिको उदाहरणमा,

340000000 = 3.4 × 100000000 (सुरुको अङ्क 3 पछि आठओटा अङ्क छन् । त्यसैले 100000000 ले गुणन गरेको)

$= 3.4 \times 10^8$

नियम : यदि दिइएको सङ्ख्या दशमलव सङ्ख्या हैन भने वैज्ञानिक सङ्केतमा बदल्दा सो सङ्ख्यामा कतिओटा अङ्क छन् त्यसभन्दा एक कम सङ्ख्यामा 10 को घाताङ्कमा लेख्ने

जस्तै : 653020015l2 मा जम्मा अङ्क 12 ओटा भएकाले एक कम दशको घाताङ्क लेखी गुणन गरेर पहिलो अङ्क भन्दा अगाडि दशमलव राख्ने । अर्थात्, 6.53×10^{11}

(ख) दशमलव सङ्ख्या भएमा

यदि दिइएको सङ्ख्या दशमलव सङ्ख्या छ भने त्यस्तो सङ्ख्यालाई सर्वप्रथम भिन्नमा बदल्नुपर्छ । त्यसपछि 10 को घाताङ्कमा बदल्नुपर्छ र अन्तमा 10 को ऋणात्मक घाताङ्कको रूपमा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ।

जस्तै : एउटा दशमलव सङ्ख्या 0.239865123457 छ । यसलाई वैज्ञानिक सङ्केतमा बदल्ने चरण

1. **भिन्नमा बदल्ने** : दशमलवपछि जतिओटा अङ्क छन् त्यति नै 1 पछि शून्य भएको सङ्ख्याले भाग गर्ने :

   0.239865123457

   $= \dfrac{239865123457}{1000000000000}$

   $= \dfrac{2.39865123457}{10000000000}$ (दशमलव एक अङ्कपछि ल्याएकाले हरको एउटा शून्य हटाएको)

माथिको हिसाबमा अंशमा दशमलवपछि जतिओटा अङ्क छन् हरमा 1 पछि त्यति नै शून्य छन् ।

अब, सो सङ्ख्यालाई घाताङ्कको रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् :

$= \frac{2.39865123457}{10^{11}}$ हरलाई घाताङ्कको रूपमा व्यक्त गरेको

$= 2.39865123457 \times 10^{-11}$ हरलाई घाताङ्कको रूपमा व्यक्त गरेको

$= 2.4 \times 10^{-11}$ अंशलाई एक सार्थ अङ्कसम्म शून्यान्त गरेको । यो नै दिइएको सङ्ख्याको वैज्ञानिक सङ्केत हो ।

यसरी 0.239865123457 लाई वैज्ञानिक सङ्केतमा लेख्दा 2.4 ×10^(-11) भयो ।

नोट : यदि सङ्ख्या पूर्णाङ्कमा छ भने वैज्ञानिक सङ्केत 10 को धनात्मक घाताङ्कमा हुन्छ भने सङ्ख्या दशमलवमा भए वैज्ञानिक सङ्केत 10 को ऋणात्मक घाताङ्कमा हुन्छ। माथिको उदाहरणमा,

$340000000 = 3.4 \times 10^8$

$0.239865123457 = 2.4 \times 10^{-11}$

थप उदाहरण :

(क) $759 = 7.59 \times 100 = 7.59 \times 102$

(ख) $39000 = 3.9 \times 10000 = 3.9 \times 104$

(ग) $0.000432 = \frac{0004.32}{10000} = \frac{4.32}{10^4} = 4.32 \times 10^{-4}$

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. तलका दशमलव सङ्ख्यालाई वैज्ञानिक सङ्केतमा लेख्नुहोस् :

(क) 24 (ख) 361 (ग) 56.1256 (घ) 71309765

(ङ) 0.45673 (च) 0.284001 (छ) 780000000000

(ज) 0.006710056

2. तलका वैज्ञानिक सङ्केतलाई दशमलव सङ्ख्यामा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

(क) 1.50 × 109	(ख) 3.55 × 105	(ग) 1.76 × 105
(घ) 7.73 × 10–4	(ङ) 6.4 × 10–5	(च) 5.901 × 10–6
(छ) 1.511 × 108	(ज) 9.1765 × 1012	(झ) 5.246 × 1013

2. एउटा सामानसहितको ट्रकको तौल 12,000 kg छ भने उक्त तौललाई वैज्ञानिक सङ्केतमा लेख्नुहोस् ।

4. आर्गनको परमाणुको अर्धव्यास 0.000,000,000,098 मिटर भए यसलाई वैज्ञानिक सङ्केत लेख्नुहोस् ।

5. 3 × 108 m/s ले प्रकाशको हावामा गति जनाउँछ भने त्यसको दशमलव मान कति हुन्छ ?

6. 6480000 सेकेन्ड लाई वैज्ञानिक सङ्केतमा लेख्नुहोस् ?

उत्तर

1.	(क) 2.4×10^1	(ख) 3.61×10^2	(ग) 5.61×10^1
	(घ) 7.13×10^7	(ङ) 4.5673×10^{-1}	(च) 2.84001×10^{-1}
	(छ) 7.8×10^{11}	(ज) 6.710056×10^{-3}	
2.	(क) 1500000000	(ख) 355000	(ग) 176000
	(घ) 0.000773	(ङ) 0.000064	(च) 0.000005901
	(छ) 151100000	(ज) 9176500000000	(झ) 5246000000000
3.	1. 2 × 104	4. 9.8×10^{-11}	5. 300000000 m/s
	6. 6.48 × 106		

पाठ 6

अनुपात र समानुपात
(Ratio and Proportion)

6.1 अनुपात (Ratio)

परिचय

दायाँको चित्रमा किसानले एउटा सानो पाठोको तौल कति रहेछ भनी अनुमान गर्न खाज्दै छन् ।

उनले माउ बाख्राको तौल ४० किलोग्राम र पाठाको तौल १० किलोग्राम रहेको पत्ता लगाए ।

पाठो र माउको तौल तुलना कसरी गर्नुहुन्छ ? तौललाई तुलना गर्ने तल दिइएका तरिकामध्ये तपाईंले कुन तरिका अपनाउनुहुन्छ ?

माउ बाख्राको तौल ४० के.जी., पाठोको तौल १० के.जी. भएकाले,

1. घटाउ गरेर : 40 kg – 10 kg = 30 kg

   माउको भन्दा पाठोको तौल 30 के.जी. कमी छ ।

2. जोड गरेर : 10 kg + 30 kg = 40 kg

   पाठोभन्दा माउ 30 पन बढी छ ।

3. माउको तौललाई माठाको तौलले भाग गरेर : माउ र पाठाको तौलको अनुपात $= \frac{40\text{kg}}{10\text{kg}} = \frac{4}{1}$

   माउको तौल पाठाको 4 गुणा छ ।

4. पाठाको तौललाई माउको तौलले भाग गर्दा : $\frac{10\text{kg}}{40\text{kg}} = \frac{1}{4}$

   पाठोको तौल माउको एक चौथाइ छ ।

माथि गरिएका तुलनामध्ये तपाईँलाई कुन तरिका मन पऱ्यो ? पहिलो र दोस्रो उदाहरणमा जोड वा घटाउ गरी तौलको तुलना गरिएको छ भने तेस्रो र चौथो तरिकामा एउटाको तौललाई अर्काको तौलले भाग गरी भिन्नमा प्रस्तुत गरिएको छ । यी भाग गर्ने विधिबाट वस्तुको मात्र तुलना गर्ने तरिका नै अनुपात हो । जोड वा घटाउ विधिबाट तौलको तुलना गर्दा तुलना पनि किलोग्राममा (नापको एकाइमा) गरिएको छ । अनुपातमा तौलको तुलना गर्दा नापको एकाइ हुँदैन तर कति गुणा भनी प्रस्तुत गरिन्छ ।

अर्को उदाहरण हेरौँ :

उदाहरण 1.

हरिले 300 टन सुन्तलासँग 150 टन अम्बा साटेर ल्याए ।

(क) सुन्तलाको तौललाई अम्बाको तौलसँग तुलना गर्नुहोस् ।

(ख) अम्बाको तौललाई सुन्तलाको तौलसँग तुलना गर्नुहोस् :

समाधान :

यहाँ, सुन्तलाको सङ्ख्या 300 kg, अम्बाको तौल 150 के.जी.

(क) सुन्तलाको तौललाई अम्बाको तौलसँग तुलना गर्न,

सुन्तला र अम्बाको तौलको अनुपात $= \dfrac{300\text{kg}}{150\text{kg}} = \dfrac{30}{15} = \dfrac{2}{1}$

अतः सुन्तलाको तौल अम्बाको तौलको दुई गुणा छ । यसलाई 2:1 लेखिन्छ । यसको मतलव, प्रत्येक एउटा अम्बासँग 2 ओटा सन्तलाको दरमा साटिएको रहेछ ।

(ख) अम्बाको तौललाई सुन्तलाको तौलसँग तुलना गर्नुहोस् :

अम्बासँग सुन्तलाको तौल तुलना $= \dfrac{150\text{kg}}{300\text{kg}} = \dfrac{15}{30} = \dfrac{1}{2}$

अत, अम्बाको तौल सुन्तलाको $\dfrac{1}{2}$ रहेछ । अर्थात्, प्रत्येक एक के.जी. अम्बासँग दुई के.जी. सुन्तला साटिएको रहेछ । त्यसैले अम्बा र सुन्तलाका अनुपात $\dfrac{1}{2}$ अथवा 1:2 रहेछ । यसलाई अङ्ग्रेजीमा पढ्दा "1 is to 2" पढिन्छ ।

विचार गर्नुहोस् : अनुपात निकाल्दा दुवै वस्तुको नापका एकाइ काटिएर एकाइ नभएका भिन्नको रूपमा अनुपात रहन्छ । त्यसैले अनुपातको एकाइ हुँदैन भनिन्छ ।

अनुपात (Ratio) : समान एकाइमा मापन गरिएका वस्तु तुलना गर्दा एउटाको मात्रालाई अर्कोको मात्राले भाग गरी लघुत्तम पदमा लैजाँदा हुने भिन्न स्वरूपको सङ्ख्यालाई अनुपात भनिन्छ । जस्तै : $\frac{a}{b}$ को अनुपात $\frac{a}{b}$ वा a:b हुन्छ । अनुपातको मापनको एकाइ हुँदैन । कुनै दुई परिमाणको अनुपात निकाल्दा दुवैको एकाइ समान हुनुपर्छ ।

उदाहरण 2

रामको एक दिनको कमाइ रु 2500 र मीनाको एक दिनको कमाइ 3000 रहेछ भने राम र सीताको एक दिनको कमाइको अनुपात कति हुन्छ ?

समाधान :

यहाँ, रामको एक दिनको कमाइ रु. 2500

मीनाको एक दिनको कमाइ रु. 3000

राम र मीनाको एक दिनको कमाइको अनुपात $= \frac{\text{Rs. } 2500}{\text{Rs. } 3000} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

अतः राम र मीनाको एक दिनको कमाइको अनुपात 5:6 रहेछ ।

उदाहरण 3

चारओटा कलमको रु 200k5 {र एउटा कापीको रु 70k5} भने कलम र कापीको दरको अनुपात निकाल्नुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, कापी र कलमको दर भनेको एउटा मात्र वस्तुको मूल्य हो । त्यसैले, चारओटा कलमको मूल्यबाट एउटा कलमको मूल्य पत्ता लगाऔँ :

4 कलमको मूल्य रु. 2000

1 कलमको मूल्य रु $\frac{200}{4} = ?\ 50$

अतः एउटा कलमको मूल्य रु 50 र एउटा कापीको मूल्य रु 70 छ । एउटाको मूल्यलाई

दर भनिन्छ । त्यसैले कलम र कापीको अनुपात $= \frac{\text{Rs. } 50}{\text{Rs. } 70} = \frac{5}{6}$

अतः कलम र कापीको दरको अनुपात प्रष्ट रहेछ ।

अनुपातसम्बन्धी समस्या समाधान

अनुपात एकै खाल्का वस्तुको तुलना गर्ने गणितीय तरिका हो । अनुपातको धारणा प्रयोग गरी थाहा नभएका मान पनि पत्ता लगाउन सकिन्छ । यस खण्डमा ती थाहा नभएका मान पत्ता लगाउने तरिकाका बारेमा चर्चा गरौँ :

उदाहरण 1

एउटा कारखानामा पुरुष कामदारको ठिक तीन गुणा महिला कामदार छ । यदि जम्मा कामदार 400 जना रहेछन् भने पुरुष र महिला कामदारको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

यस उदाहरणमा, पुरुष र महिलाको सङ्ख्या थाहा नभएकाले ती सङ्ख्या जनाउन x र y जस्ता चल प्रयोग गर्न सकिन्छ । यहाँ, पुरुषको सङ्ख्यालाई ह ले जनायौँ भने,

प्रश्नअनुसार, पुरुषको सङ्ख्याभन्दा महिलाको सङ्ख्या तीन गुणा छ भन्नुको अर्थअनुसार,

यदि पुरुषको सङ्ख्या x भए महिलाको सङ्ख्या 3x हुन्छ ।

हामीलाई थाहा छ, जम्मा कामदारको सङ्ख्या = 400

पुरुषको सङ्ख्या + महिलाको सङ्ख्या = 400

अथवा, $x + 3x = 400$

अथवा, $4x = 400$

अथवा, $x = \frac{400}{4} = 100$

अतः, $x = 100$

यहाँ, पुरुषको सङ्ख्या x भएकाले पुरुष कामदारको सङ्ख्या 100 छ भने,

महिला कामदारको सङ्ख्या, $3x = 3 \times 100 = 300$

जाँच गरौँ : जम्मा कामदार = $x + 3x = 100 + 300 = 400$ ठिक छ ।

छोटो विधि : पुरुष कामदार x भए महिला कामदार $3x$ हुन्छ । त्यसैले,

$x + 3x = 400$

अथवा, $4x = 400$

$x = 100$ [दुवैतिर 4 ले भाग गर्दा]

त्यसैले पुरुष कामदार $x = 100$ जना भएकाले महिला कामदार $3x = 300$ हुन्छ ।

तीनओटा वस्तुको अनुपात

चित्रमा तीनओटा चामलका बोरा देखाइएको छ । ती बोरामा भएको चामलको अनुपात 3:4:5 छ ।

यसको मतलव सबैभन्दा सानो बोरामा 3 के.जी. चामल छ भने अलि ठुलामा 4 के.जी. र सबैभन्दा ठुलामा 5 के.जी. चामल हुन्छ ।

यदि सबैभन्दा सानोमा 6 के.जी. भए दोस्रामा 8 के.जी. र तेस्रामा 10 के.जी. चामल हुन्छ ।

अब तलको तालिका हेरौँ :

तर हामीलाई सबैभन्दा सानो बेरामा कति चामल छ भन्ने त थाहा छैन । तर तीनओटै बोरामा जम्मा कति चामल छ भन्ने थाहा भएमा हामीले जम्मा चामललाई नौ बराबर भागमा $(3 + 4 + 5 = 12)$ भागमा बाँड्न सक्यौँ भने ती बोरामा कति कति चामल छ भनी पत्ता लगाउन सक्छौँ ।

मानौँ जम्मा चामल 240 के.जी. छ । यस अवस्थामा ती बोरामा भएको चामललाई $3x$, $4x$ र $5x$ मान्न सकिन्छ किनभने $3x + 4x + 5x = 12x$ हो र यो $12x = 240$ के.जी. हुन्छ ।

अतः $12x = 240$ के.जी.

अथवा, $x = \frac{240}{12}$ के.जी. $= 20$ के.जी.

अब, तीनओटा बोरामा भएको चामलको तौल निम्नअनुसार छ :

- पहिलो बोराको चामलको तौल, $3x = 3 \times 20$ के.जी. $= 60$ के.जी.
- दोस्रो बोराको चामलको तौल, $4x = 4 \times 20$ के.जी. $= 80$ के.जी.
- तेस्रो बोराको चामलको तौल, $5x = 5 \times 20$ के.जी. $= 100$ के.जी.

परीक्षण गरौँ : जम्मा तौल $= 60$ के.जी. $+ 80$ के.जी. $+ 100$ के.जी. $= 240$ के.जी.

6.2 समानुपात (Proportion)

समानुपात भनेको बराबर अनुपात हो । यसको शाबिदक अर्थअनुसार दुईओटा बराबर अनुपात भन्ने बुझ्न सकिन्छ । उदाहरणका लागि राम र हरीको तौल 20 के.जी. र 30 के.जी. रहेछ । त्यस्तै, मीरा र मनिताको तौल 40 के.जी. र 60 के.जी. रहेछ । अब तलका अनुपात निकालौँ :

(क) राम र हरिको तौलको अनुपात $= \dfrac{20\text{kg}}{30\text{kg}} = \dfrac{2}{3}$

(ख) मीरा र मनिताको तौलको अनुपात $= \dfrac{40\text{kg}}{30\text{kg}} = \dfrac{2}{3}$

माथिको उदाहरणमा (क) र (ख) मा देखिएका दुईओटा अनुपात बराबर छन् । यस्ता बराबर अनुपातलाई समानुपात (Proportion) भनिन्छ । यस उदाहरणमा राम र हरिको तौललाई $\frac{a}{b}$ तथा मिरा र मनिताको तौललाई $\frac{c}{d}$ मान्दा, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ लेख्न सकिन्छ । यसलाई अर्को तरिकाले $a:b = c:d$ पनि त लेख्न सकिन्छ । तर समानुपातको सङ्केतअनुसार समानुपात जनाउन बराबर चिह्न (=) को सट्टा समानुपातको चिह्न (::) प्रयोग गरिन्छ । अतः माथिको समानुपातलाई $a:b :: c:d$ लेखिन्छ । यसलाई a, b, c र d लाई समानुपातमा छन् भनिन्छ ।

उदाहरण 1

यदि 10, 20, 30 र p समानुपातमा भए p को मान कति हुन्छ ?

समाधान : यदि 10, 20, 30 र p समानुपातमा भए, समानुपातको अर्थअनुसार

$10:20::30:p$ हुन्छ ।

अर्थात् $\dfrac{10}{20} = \dfrac{30}{p}$

अथवा $p = \frac{30 \times 20}{10}$

अथवा, $p = 60$

$\therefore$ चौथो समानुपातको सङ्ख्या $p = 60$ रहेछ ।

उदाहरण 2

सङ्ख्या 2:5 मा कुन सङ्ख्या जोड्दा तिनको अनुपात 4:5 हुन्छ ?

समाधान : दिइएको अनुपात $\frac{2}{5}$

मानौँ थप्नुपर्ने सङ्ख्या x छ । अब दिइएको अनुपातमा हर र अंश दुवैमा x जोडौँ :

प्रश्नअनुसार, $\frac{2 + x}{5 + x} = \frac{4}{5}$

माथिको समीकरण हल गरी थप्नुपर्ने सङ्ख्या x पत्ता लगाउन क्रस गुणन गर्नुपर्छ । वायाँतिरको अंशसँग दायाँतिरको हर गुणन गरी बराबर चिह्न राखेर दायाँतिरको अंश र बायाँतिरको हर गुणन गर्ने नियमअनुसार क्रस गुणा गर्दा,

$$5(2 + x) = 4(5 + x)$$

अथवा, $10 + 5x = 20 + 4x$

अथवा, $5x - 4x = 20 - 10$ (समीकरणमा बराबरी तथ्यको प्रयोग गर्दा)

अथवा, $x = 10$

$\therefore x = 10$

अतः दिइएको अनुपात $\frac{2}{5}$ मा अंश र हर दुवैमा 10 थप्दा आउने अनुपात $\frac{4}{5}$ हुन्छ ।

जाँचौँ: $\frac{2 + 10}{5 + 10} = \frac{\cancel{12}^{4}}{\cancel{15}_{5}} = \frac{4}{5}$

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. अनुपात भनेको के हो ? उदाहरणसहित लेख्नुहोस् ।

2. एउटा कामदारको कमाइ रु 20000 छ र उसको श्रीमतीको कमाइ रु 2500 छ । श्रीमान् र श्रीमतीको कमाइको अनुपात कति हुन्छ ?

3. हरिको कमाइ मिराको कमाइको $\frac{2}{3}$ छ । यदि मिराको कमाइ रु 9000 भए हरिको कमाइ कति होला ?

4. दुई जोडी दम्पतीको तौलको अनुपात $\frac{45}{50}$ र $\frac{36}{40}$ रहेछन् । के उनीहरूको तौल समानुपात छ ? दुवै अनुपातलाई लघुत्तम पदमा लगी पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) x:5 = 10:25 (ख) 3:7 = 21:x (ग) 10:x = 2:11

6. तलका सङ्ख्या समानुपातमा भए थाहा नभएका पद पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) a, 4, 6,7 (ख) 2, x, 3, 8 (ग) 2, 3, 8, d

(घ) x, 2, 6, 4 (ङ) 9, 4, 4, p

7. (क) सङ्ख्या 12 र 21 लाई 5:8 बनाउन दुवैमा कति जोड्नुपर्ला ?

(ख) सङ्ख्या 10 र 25 लाई 2:3 बनाउन पर्दा दुवैमा कति जोड्नुपर्ला ?

(ग) सङ्ख्या 15 र 18 लाई 3:4 बनाउन दुवैमा कति घटाउनुपर्ला ?

8. रु. 600 मा 12 ओटा कापी पाइन्छ भने रु. 900 मा कतिओटा कापी पाइन्छ ?

9. रु. 50 मा 5 ओटा कलम पाइन्छ भने रु. 240 मा कतिओटा कलम पाइन्छ ?

10. जनता प्रा.वि. मा कापी र कलम प्रयोग गर्ने विद्यार्थीको अनुपात 10:11 छ । यदि कापी प्रयोग गर्ने 110 जना विद्यार्थी भए कलम प्रयोग गर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

11. दुईओटा सङ्ख्याको अनुपात 3:2 छ । यदि यदि तीमध्ये एउटा सङ्ख्या 321 भए अर्को सङ्ख्या कति होला ?

12. रिना र मीना दुई दिदीबहिनी हुन् । कक्षा 10 पढ्ने रिना र कक्षा 8 मा पढ्ने मीनाले किताब किन्दा लागेको खर्चको अनुपात 3:2 छ । यदि मीनाले रु. 824 तिरिन् भने रिनाले कति तिरिन् ?

उत्तर

2. 4:5 3. 6000 4. $\frac{9}{10}$ 5. 2, 49, 55 6. $a = \frac{24}{7}$, $x = \frac{16}{3}$, $x = 3$, $p = \frac{16}{9}$

7. (क) 3, 4, 3 (ख) 6.8 18 9. 24 10. 121 11. 214 12. 1236

पाठ 7

नाफा र नोक्सान
(Profit and Loss)

तलको कथा पढ्नुहोस् र तालिका भर्नुहोस् :

सरोजले आफ्नी श्रीमती र छोराछोरीलाई खेतबारीको काम पनि सिकाएका छन् । उनले छोरी र छोराका लागि पनि तरकारीको हेरचाह गर्ने जिम्मा दिएका छन् । तरकारीको हेरचाह गरेबापत उनीहरूले सो तरकारीबाट आउने आम्दानीको केही भाग आफैँले पनि खर्च गर्न पाउँछन् । उनीहरूको खेतबारी थोरै भएकाले सरोजले अरूको खेतबाट तरकारीसमेत खरिद गरेर तरकारी व्यापार गर्छन् । तरकारी व्यापार गर्दा खरिद गरेको मूल्यमा केही मुनाफा थपी बेच्छन् ।

उनले कुनै तरकारी कृषकको खेतबाट जतिमा किनेर ल्याउँछन् त्यसको 10 प्रतिशत नाफा खाएर बेच्ने गरेका छन् । तर ग्राहकले आलिकति मूल्य कम गरी छुट दिएर लैजान खोज्छन् । त्यसो गर्दा उनलाई तरकारी ल्याउने गाडी भाडा र नाफा नपुग्ने भयो । अब के गर्ने भनी विचार गर्न थाले ।

सरोजकी छोरीले एउटा जुक्ती सोचिन् र भनिन् : बुबा, हामीले किनेको मूल्य (क्रम मूल्य)मा 10 प्रतिशत थप गरेर नबेच्दा घाटा लाग्छ । त्यसैले अब नाफासमेत गरेर आउने हालको बिक्री मूल्य बढी मूल्य राखौँ । जस्तै 100 मा किनेको काउलीलाई 10 प्रतिशत नाफा राख्दा रु 110 हुन्छ । त्यसपछि रु 5 थप्दा रु 115 हुन्छ । त्यसैले काउलीको मूल्य रु. 115 अङ्कित गर्ने र त्यसबाट रु. 5 छुट दिने । यसो गर्दा हाम्रो मुनाफा पनि घट्दैन । ग्राहक पनि छुट पाउँदा खुसी हुन्छन् । छोरीको कुरा कस्तो लाग्छ त ? भन्दै छोरालाई सरोजले सोधे । छोराले गज्जब छ बुबा भने । त्यसपछि उनीहरू हरेक सामानको क्रय मूल्यमा आवश्यक नाफा जोडेर बिक्री गर्ने मूल्य (विक्रय मूल्य) राखे । त्यसपछि केही रकम थप गरेर ग्राहकलाई देखाउने मूल्य (अङ्कित मूल्य) राखे ।

क्रियाकलाप :

सरोजको तरकारी पसलको मूल्य सूची तालिकामा दिइएको छ। छुटपछिको मूल्य पत्ता लगाउनुहोस् :

तरकारी	प्रतिकेजी मूल्य	छुट	छुटपछिको बिक्री मूल्य
काउली	रु. 115	रु. 5	रु. 110
बन्दाकोपी	रु 40	रु 10	
प्याज	रु 50	रु 12	
मुला	रु 25	रु 3	

नोटः *यो पसलबाट दश किलोग्रामभन्दा बढी लैजाने हो भने सबैमा 10% छुट दिइने छ।*

माथिको तालिकामा प्रत्येक सामान 10 के.जी.को कति पर्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् र सो मूल्यमा 10% छुट राखी कतिमा बेच्नुपर्छ, मूल्य सूची बनाउनुहोस्। उदाहरणका लागि काउलीको मूल्य पत्ता लगाइएको छ।

तरकारी	प्रतिकेजी मूल्य	10 के.जी.को मूल्य	छुट 10%	छुटपछिको विक्रय मूल्य
काउली	रु. 115	10 × रु. 115		
= रु 1150	रु 1150 को 10% = रु. $1150 \times \frac{10}{100}$			
= रु. 115	रु. 1150 - रु 115 = रु. 1135			
बन्दाकोपी	रु 40			
प्याज	रु 50			
मुला	रु 25			

माथिको कथामा प्रयोग भएका शब्दावली

क्रय मूल्य	=	व्यापारीले आफूले खरिद गरेको मूल्य
विक्रय मूल्य	=	व्यापारीले सामान बेच्ने मूल्य
नाफा	=	क्रय मूल्यमा थपिएको रकम जुन थपेपछि विक्रय मूल्य बन्छ ।
अङ्कित मूल्य	=	व्यापारीले ग्राहकलाई देखाउने मूल्य जसबाट केही रकम छुट गरेपछि विक्रय मूल्य थाहा लाग्छ ।
छुट : अङ्कित मूल्यबाट घटाउने रकम		

अब केही उदाहरण हेरौँ :

शीलाले रु 500 मा किनेको टोपी रु 520 मा बेचिछन् भने उनलाई कति नाफा वा नोक्सान भयो ?

छलफल गरौँ :

- शीलाले किनेको टोपीको क्रय मूल्य = रु 500
- टोपीको विक्रय मूल्य = रु 520

तुलना गरौँ :

यहाँ क्रय मूल्यभन्दा विक्रय मूल्य बढी छ । थोरै रकममा किनेर धेरै रकममा बेच्दा नाफा हुन्छ । त्यसैले नाफा रु 20 भयो ।

यहाँ नाफा रु 20 कसरी भयो भन्न सक्नुहुन्छ ?

यहाँ, विक्रय मूल्य बढी छ र क्रय मूल्य कमी छ । यस्तो वस्थामा नाफा हुन्छ किनकि थोरैमा किनेर धेरै रकममा बेच्दा किनेको रकम बाहेक थप रकम हात पर्छ । त्यसैले नाफा भनेको विक्रय मूल्य र क्रय मूल्यको फरक हो ।

अतः नाफा = विक्रय मूल्य - क्रय मूल्य

यदि शीलाले सो टोपी रु 470 मा बेचेको भए नाफा वा घाटा के हुन्थ्यो त ? विचार गरौँ :

यदि शीलाले रु 500 मा किनेको टोपी रु 470 मा बेचेको भए पक्कै पनि घाटा हुने थियो किनकि किनेको रकमभन्दा थोरैमा बेचेको अवस्थालाई घाटा भएको मानिन्छ ।

अतः घाटा = रु.500 – रु. 470 = रु 30

माथिको उदाहरणमा नाफा र घाटा हुने अवस्थाका बारेमा छलफल गरियो । के बुझ्नुभयो ? पुनरवलोकन गर्नुहोस् ।

सम्झौं :

(क) यदि विक्रय मूल्य > क्रय मूल्य भएमा नाफा हुन्छ । त्यसैले, **नाफा = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य**

(ख) यदि विक्रय मूल्य ? क्रम मूल्य भएमा घाटा हुन्छ । त्यसैले, **घाटा क्रय मूल्य – विक्रय मूल्य**

माथिको उदाहरणमा,

पहिलो अवस्थामा क्रय मूल्य = रु 500, विक्रय मूल्य = रु 520, नाफा = रु 20

नाफा कति प्रतिशत भयो ? नाफा रकमलाई क्रय मूल्यसँग तुलना गरी नाफा प्रतिशत निकाल्न सकिन्छ ।

त्यसैले, विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य = नाफा रकम

अब, नाफा र क्रय मूल्यको अनुपात लेखौँ : $\frac{20}{500}$

यसलाई प्रतिशतमा बदलौँ : $\frac{20}{500} \times 100\% = 4\%$

त्यसैले नाफा प्रतिशत $= \frac{\text{नाफा रकम}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$

त्यसै गरी घाटा प्रतिशत $= \frac{\text{घाटा रकम}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$ हुन्छ ।

यहाँ, घाटा प्रतिशत $= \frac{30}{500} \times 100 = 6\%$

छुट (Discount)

तल दिइएको संवादको अध्ययन गर्नुहोस् :

सुशीला कक्षा 8 मा अध्ययन गर्ने एक छात्रा हुन् । एक दिन उनी आफ्ना बाबासँग बजार गएकी थिइन् ।

एउटा पसलमा उनले चित्रमा देखाइएको जस्तै गरी लुगालाई छुटसहित बिक्री (sale) हुन्छ भनेर राखेको देखिन् । उनलाई त्यस बारेमा जान्ने जिज्ञासा भयो र यो कुरा बाबालाई सुनाइन्, बाबा छुटसहित बिक्री (sale) भनेको के हो ?

बाबा : सुन, छुटसहित बिक्री (sale) भनेको जति मूल्य तोकिएको छ त्यसमा केही मूल्य घटाएर पाइन्छ भनेको हो छोरी ।

छोरी : बाबा, मन पर्ने रङ रहेछ भने मलाई चाहिएको लुगा पाइन्ट र कुर्ता सुरुवाल किनौँ न ।

बाबा : ल हिँड न त जाऔँ । अनि दुवै जना पसलमा छिर्छन् ।

छोरी : बाबा, पाइन्टको रु. 2,000 र कुर्ता सुरुवालको रु. 3,000 पर्ने रहेछ, यसलाई छुटपछि किन्दा कतिमा पाइन्छ होला ?

बाबा : तिमीले पनि जान्नुपर्ने हो नि यो त । ल सुन । दुइटाको गरेर जम्मा रु. 5,000 भयो । त्यस मूल्यलाई ती सामानको अङ्कित मूल्य भनिन्छ । अब यसमा 20% छुट रहेछ त्यसैले 5000 को 20% नै उक्त सामानको छुट रकम हो । ल हेर १ कापीमा लेख्दै ....।

छुट रकम $= 5000$ को $20\% = 5000 \times \frac{20}{100} =$ रु $=1,000$

छोरी : ए अब त अङ्कित मूल्यमा छुट रकम घटाएपछि जति आउँछ त्यसमा हामीले किन्न पायौँ है न त बाबा ।

बाबा : हो छोरी, अब भने तिमीले बुझिछौ । ल भन त हामीले कतिमा पाउने भयौ ?

छोरी : पख्नु है त रु. 5000 - रु =1,000 = रु = 4,000 हुन्छ ।

बाबा : ल हेर छोरी पसले (उहाँ) ले दिएको बिलमा पनि छुट रकम कति छ ?

समता फेन्सी स्टोर्स

पान नं. 105998932 मिति : 2079/09/03

बिल नं. 02313 क्रेता :

क्र. स.	सामानको नाम	परिमाण	दर	जम्मा रकम (रु.)
1.	पाइन्ट	1	रु. 2000	2,000
2.	कुर्ता सुरुवाल	1	रु.3,000	3,000
जम्मा				रु. **5,000**
छुट = 20% ले आउने रकम				रु. **1,000**
छुटपछिको बाँकी रकम				रु. **4,000**

अक्षरेपि : चार हजार मात्र

विक्रेता ....

छोरी : हो त बाबा रु. 4,000 नै छुट रहेछ । मैले भनेको मिल्यो नि ।

बाबा : हो छोरीले भनेको मिल्यो, अब तिमीले बुझ्यौ । म निकै खुसी छु ।

सूत्रको रूपमा सम्झौं :

विक्रय मूल्य = अङ्कित मूल्य (MP) – छुट रकम (D)

छुट रकम = अङ्कित मूल्य (MP) को छुट प्रतिशत = MP × छुट प्रतिशत

जानिराख्नुपर्ने:

(क) व्यापारीले सामानको मूल्य निर्धारण गरी ग्राहकलाई बताउने मूल्यलाई अङ्कित मूल्य (marked price) भनिन्छ ।

(ख) कुनै वस्तुको अङ्कित मूल्यमा केही रकम कम गरी बिक्री गरिएको छ भने उक्त कम गरिएको रकमलाई छुट (discount) भनिन्छ ।

(ग) अङ्कित मूल्यमा केही छुट गरेर सामान किनिन्छ भने छुटपछिको मूल्यलाई विक्रय मूल्य भनिन्छ ।

उदाहरण 1

समिरले रु.400 मा एउटा विज्ञानको पुस्तक किनेर ल्याए र उक्त पुस्तकलाई रु 500 मा बेचे ।

(क) क्रय मूल्य र विक्रय मूल्यमा कुन धेरै छ, लेख्नुहोस् ।

(ख) उनलाई सो पुस्तक बेच्दा कति नाफा वा नोक्सान भयो पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) नाफा वा नोक्सान प्रतिशत पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

किताबको क्रय मूल्य मूल्य (CP) = रु. 400

किताबको विक्रय मूल्य मूल्य (SP) = रु. 500

(क) यहाँ, विक्रय मूल्य क्रय मूल्यभन्दा धेरै छ ।

(ख) विक्रय मूल्यभन्दा क्रय मूल्य धेरै भएकाले उनलाइ नाफा हुन्छ ।

त्यसैले, नाफा = विक्रय मूल्य (SP) - विक्रय मूल्य (CP)

नाफा = रु. 500 - रु. 400 . रु. 100

(ग) हामीलाई थाहा छ, नाफा प्रतिशत $= \frac{100}{400} \times 100\% = 25\%$

उदाहरण 2

शशाङ्कले एउटा ल्यापटप 10% छुटमा किन्दा पसलेलाई रु.99,000 तिर्नुपऱ्यो भने,

(क) सो ल्यापटपको अङ्कित मूल्य कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) सो ल्यापटपको छुट रकम कति पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

ल्यापटपको छुट प्रतिशत = 10%, विक्रय मूल्य (SP) = रु. 99,000

अङ्कित मूल्य (MP) = ?

मानौँ अङ्कित मूल्य = x छ ।

(क) हामीलाई थाहा छ,

वि.मू (SP) = अ.मू.– अ.मू.को छुट रकम

अथवा, $99{,}000 = x - x \times 10\%$

अथवा, $99{,}000 = x - x \times \dfrac{10}{100}$

अथवा, $99{,}000 = \dfrac{100x - 10x}{100}$

अथवा, $99{,}000 = \dfrac{90x}{100}$

अथवा, $99{,}000 \times 100 = 90x$

अथवा, $\dfrac{99{,}000 \times 100}{99} = x$

$\therefore x = 1{,}10{,}000$

अतः उक्त ल्यापटपको अङ्कित मूल्य रु.1,10,000 रहेछ ।

(ख) ल्यापटपको छुट रकम = $x \times \dfrac{10}{100}$ = रु =$1{,}10{,}000 \times \dfrac{10}{100}$ ($\therefore$ x को मान प्रतिस्थापन गर्दा)

अतः उक्त ल्यापटपको छुट रकम = रु. 11,000 हुन्छ ।

उदाहरण 3.

विक्रमले एउटा मोबाइल रु.25,000 मा किने छन् । त्यस मोबाइलको अङ्कित मूल्य क्रय मूल्यको 20% ले बढी कायम गरेछ । यदि उनले उक्त मोबाइललाई 25% नै छुटमा बेचे भने,

(क) उक्त मोवाइको अङ्कित मूल्य कति होला ?

(ख) उनले कति रुपियाँ छुट दिएछन् ?

(ग) विक्रमले कति रुपियाँमा उक्त मोबाइल बेचे ?

(घ) उनलाई उक्त मोबाइलबाट कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान् भयो, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मोबाइलको क्रय मूल्य (CP) = रु. 25,000 प्रश्नानुसार,

(क) अङ्कित मूल्य (MP) = ?

सूत्रअनुसार,

अङ्कित मूल्य (MP) = क्र.मू. + क्र.मू. को 20%

$= 25,000 + 25,000 \times \frac{20}{100}$

$= 25,000 + 5,000$

$= 30,000$

(ख) छुट (Discount) = रु

हामीलाई थाहा छ,

छुट (Discount) = अङ्कित मूल्यको छुट प्रतिशत

= 30,000 को 25%

$= 30,000 \times \frac{25}{100}$

$= 7,500$

अतः सो मोबाइलको छुट रकम रु. 7,500 हुन्छ।

(ग) विक्रय मूल्य (SP) = ?

सूत्रअनुसार, वि.मू = (SP) = अ.मू.(MP) − छुट (Discount)

$= 30,000 - 7,500$

= रु.22,750

(घ) यहाँ, मोबाइलको क्रय मूल्यभन्दा विक्रय मूल्य कम भएकाले नोक्सान हुन्छ।

अब, नोक्सान = क्रय मूल्य − विक्रय मूल्य

$= 25,000 - 22,750$

$= 2,250$

फेरि, नोक्सान प्रतिशत = (2,250) र (25,000) ×100%

= 9%

अतः नोक्सान प्रतिशत = 9%

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. तल दिइएको अवस्थामा नाफा वा नोक्सान के हुन्छ, अवलोकन गरी पत्ता लगाउनुहोस् । एउटा उदाहरण देखाइएको छ :

	क्रय मूल्य	विक्रय मूल्य	नाफारनोक्सान (रु.)
(क)	रु. 1600	रु. 1830	नाफा = रु. 1830 - रु.1600 = रु. 230
(ख)	रु. 1200	रु. 1110	....
(ग)	रु. 1550	रु. 2200	....
(घ)	रु. 710	रु. 630	....

2. तल दिइएको अवस्थामा नाफा वा नोक्सान के हुन्छ, अवलोकन गरी पत्ता लगाउनुहोस् र प्रतिशतमा निकाल्नुहोस् ।

	क्रय मूल्य	विक्रय मूल्य	नाफा/नोक्सान	नाफा र नोक्सान प्रतिशत
(क)	रु. 1500	रु. 1800	नाफा = रु. 300	नाफा = $\frac{3000}{1500} \times 100\% = 20\%$
(ख)	रु. 1200	रु. 1800	....	
(ग)	रु. 1250	रु. 1150	....	
(घ)	रु. 2200	रु. 1100	....	

3. तल दिइएको क्रयमूल्य र नाफा वा नोक्सानबाट विक्रय मूल्य पत्ता लगाउनुहोस् :

	क्रय मूल्य	नाफा र घाटा	विक्रय मूल्य
(क)	रु. 25,010	नाफा रु. 29,010	....
(ख)	रु. 30,000	घाटा रु. 2,000	....
(ग)	रु. 40,000	नाफा रु. 2500	....
(घ)	रु. 60,000	नाफा रु. 10,000	....

4. विक्रय मूल्य र नाफा वा नोक्सान दिइएको अवस्थामा, क्रय मूल्य पत्ता लगाउनुहोस् :

	विक्रय मूल्य	नाफा/घाटा	क्रय मूल्य
(क)	रु. 6010	नाफा रु. 1.300	....
(ख)	रु. 20,00	घाटा रु. 1730	....
(ग)	रु. 20,200	नाफा रु. 3400	....
(घ)	रु. 36,600	नाफा रु. 3,330	....

5. कवीन्द्रले रु. 2,50,900 मा किनेको मोटरसाइकल रु. 2,10,450 मा बेच्दा कति नोक्सान हुन्छ ? नोक्सान प्रतिशत पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. सीतारामले रु.200 अङ्कित मूल्य भएको अभ्यास पुस्तिकालाइ 20% छुट दिइ बेचेछन्, भने सो अभ्यास पुस्तिकालाई कति तिर्नुपर्ला ?

7. एउटा टिसर्टको अङ्कित मूल्य रु.1,550 छ । यदि पसलेले उक्त टिसर्टमा 12% छुटमा बिक्री गर्छ भने उक्त टिसर्ट किन्न कति रुपियाँ तिर्नुपर्ला ?

8. साङ्गे लामाले 10% छुटमा एउटा क्यामेरा रु.13950 मा किनेर ल्याए भने सो क्यामेराको अङ्कित मूल्य कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. रामनरेशले 14% छुटमा किन्दा एउटा पाइन्टलाई रु.1075 पऱ्यो भने सो पाइन्टको अङ्कित मूल्य कति होला ?

10. एउटा पसलेले रु. 1400 मा नेपाली ब्रान्डको जुत्ता किने छन् । त्यस जुत्ताको अङ्कित मूल्य क्रय मूल्यको 25% ले बढी तोक्यो । यदि पसलेले उक्त जुत्तालाई 20% छुटमा बेचे भने,

(क) उक्त जुत्ताको अङ्कित मूल्य कति होला ?

(ख) क्रेताले कति रुपियाँ छुट पायो ?

(ग) पसलेले कति रुपियाँमा उक्त जुत्ता बेच्यो ?

(घ) पसलेले उक्त जुत्ताबाट कति रुपियाँ नाफा गर्‍यो, पत्ता लगाउनुहोस् ।

11. सरला काठमाडौँ गएको बेलामा एउटा मोबाइल रु. 42,000 मा किनेर ल्याएकी छन् । त्यस मोबाइलको अङ्कित मूल्य क्रय मूल्यभन्दा 30% ले बढी छ । यदि पसलेले उक्त टर्चलाई 20% छुटमा बेच्यो भने,

(क) उक्त मोबाइलको अङ्कित मूल्य कति होला ?

(ख) सरलाले कति रुपियाँ छुट पाएकी रहिछन् ?

(ग) पसलेले कति रुपियाँमा उक्त मोबाइल बेचेछन् ?

(घ) पसलेले उक्त मोबाइलबाट कति प्रतिशत नाफा गरेछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

12. चेतनाथले एउटा कम्प्युटर रु. 90,000 मा किने छन् । त्यस कम्प्युटरको अङ्कित मूल्य क्रय मूल्यको 30% ले बढी छ । यदि चेतनाथले उक्त ल्यापटपलाई 30५ छुटमा बेचे भने,

(क) उक्त ल्यापटपको अङ्कित मूल्य कति होला ?

(ख) ल्यापटपमा पाएको छुट रकम पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) चेतनाथले कति रुपियाँमा उक्त कम्प्युटर बेचे ?

(घ) उनलाई उक्त ल्यापटपबाट कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान भयो, पत्ता लगाउनुहोस् ।

13. महेन्द्रले एउटा वासिङ मेसिनको अङ्कित मूल्य रु. 60,000 तोकेका छन् । यदि उनले 15% छुट दिएर बेच्दा उनलाई रु. 5,000 नाफा भयो भने,

(क) कति रुपियाँ छुट दिए ?

(ख) कति रुपियाँमा उक्त वासिङ मेसिन बेचे ?

(ग) महेन्द्रले कति रुपियाँमा उक्त सुटकेस किनेका रहेछन् ?

(घ) महेन्द्रलाई उक्त वासिङ मेसिनबाट कति प्रतिशत नाफा भयो, पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

तपाईंको घरमा दैनिक रूपमा प्रयोग हुने कुनै पाँचओटा सामानको विवरण तयार गर्नुहोस् । ती विवरणका आधारमा नजिकैको पसलमा गई तिनीहरूको अङ्कित मूल्य, विक्रय मूल्य र छुट पत्ता लगाउनुहोस् । ती सामानलाई कति कतिमा किन्नुभएको रहेछ ? परिवारका सदस्यसँग सोधेर टिपोट गर्नुहोस् । त्यसपछि ती जानकारीबाट नाफा वा नोक्सान के भयो, पत्ता लगाई त्यसको प्रतिशतसमेत निकालेर कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

5. 16.12% **6.** Rs.160 **7.** Rs.1364 **8.** 15500 **9.** Rs.1250

10. (क) Rs. 1750, (ख) Rs.350, (ग) Rs. 1400, (घ) 0

11. (क) Rs.5460, (ख) Rs.1092, (ग) Rs.4368, (घ) 4%

12. (क) Rs.117000, (ख) Rs. 35100, (ग) Rs. 81900, (घ) 6.92% loss

13. (क) Rs. 9000, (ख) Rs.51000, (ग) Rs. 46000, 9.8%

पाठ 8

ऐकिक नियम
(Unitary Method)

परिचय

एउटा कलमको रु 20k पर्छ भने 4 ओटा कलमको कति पर्ला ? यो प्रश्नको उत्तर तपाईँ सहजै दिन सक्नुहुन्छ। तर यस्तो प्रश्नमा एउटा गणितीय ढाँचा पहिचान गर्न सक्छौँ। तलको उदाहरण हेरौँ :

कलमको सङ्ख्या	जम्मा मूल्य	ढाँचा
1	20	$20 \times 1 = 20$
2	$20 + 20 = 40$	$20 \times 2 = 40$
3	$20 + 20 + 20 = 60$	$20 \times 3 = 60$
4	$20 + 20 + 20 + 20 = 80$	$20 \times 4 = 80$

यसरी एउटा कलमको मूल्य थाहा हुँदा चारओटा कलमको मूल्य जोड क्रियाबाट र गुणन क्रियाबाट पत्ता लगाउन सकियो । यदि चारओटाको सट्टा 400 ओटा कलमको मूल्य निकाल्नुपर्ने थियो भने चारसय पटक जोड्न कठिन हुन्छ। त्यसको सट्टा एउटा कलमको मूल्यलाई 400 ले गुणन गर्दा पनि हुने रहेछ भन्ने कुरा माथिको तालिकाबाट थाहा लाग्यो। माथिको उदाहरणमा एउटा कलमको मूल्य थाहा हुँदा धेरै कलमको मूल्य पत्ता लगाउन एउटाको मूल्यलाई कलमको सङ्ख्याले गुणन गर्न सकिने रहेछ भन्ने स्पष्ट भयो। यसको ठिक उल्टो, चारओटा कलमको मूल्य 80 भए एउटा कलमको मूल्य रु 20 पत्ता लगाउन $\frac{80}{4} = 20$ गर्दा पनि हुने रहेछ भन्ने कुरा सहजै स्पष्ट हुन्छ। त्यसैले धेरै वस्तुको मान थाहा भए एउटाको मान पत्ता लगाउन सङ्ख्याले भाग गर्न सकिने रहेछ भन्ने कुरा पनि स्पष्ट भयो। यस्तो सङ्ख्या र मान समावेश भएका समस्या पत्ता लगाउने नियमलाई ऐकिक नियम भनिन्छ।

ऐकिक नियम : एउटा वस्तुको मानलाई सङ्ख्याले गुणन गर्दा त्यती सङ्ख्याको मान पत्ता लाग्छ भने धेरै वस्तुको मान थाहा भएमा सो मानलाई वस्तुको सङ्ख्याले भाग गर्दा एउटा वस्तुको मान पत्ता लाग्छ। यो एकाइ वा एउटा वस्तुको मान पत्ता लगाउने नियमलाई ऐकिक नियम भनिन्छ।

ऐकिक नियमबाट गर्न सकिने समस्याको समाधान हामी प्रत्यक्ष्य र अप्रत्यक्ष विचरणको नियमबाट पनि गर्न सकिन्छ ।

प्रत्यक्ष विचरण (Direct variation)

तलको तालिकामा मानिसको सङ्ख्या र आवश्यक खानाको परिमाण देखाइएको छ । खाली ठाउँमा आवश्यक मान हिसाब गरेर भर्नुहोस् :

मानिसको सङ्ख्या	1	2	3	4	5
खानाको परिमाण (के.जी.)	5	10	15		

माथिको तालिकामा मानिसको सङ्ख्या बढ्दै जाँदा उनीहरूलाई आवश्यक खानाको परिमाण (किलोग्राम) बढ्दै गएको देखिन्छ । यस्तो एउटा मान बढ्दा अर्को मान पनि सँगसँगै बढ्दै जाने चलको सम्बन्धलाई प्रत्यक्ष विचरण भनिन्छ । यहाँ चल भन्नाले मानिसको सङ्ख्या र खानाको परिमाण बुझिन्छ ।

प्रत्यक्ष विचरण : दुईओटा चरमध्ये एउटा चर बढ्दा अर्को चर पनि बढ्ने अथवा एउटा चर घट्दा अर्को चरपनि घट्ने सम्बन्धलाई प्रत्यक्ष विचरण भनिन्छ ।

अप्रत्यक्ष विचरण (Indirect variation)

तलको तालिकामा मानिसको सङ्ख्या र एउटा खेत खन्न लाग्ने समय देखाइएको छ । खाली ठाउँमा आवश्यक मान हिसाब गरेर भर्नुहोस् :

मानिसको सङ्ख्या	1	2	3	4	5
एउटा काम सक्न लाग्ने समय (**घण्टामा**)	20	10	6		

माथिको तालिकामा मानिसको सङ्ख्या बढ्दै जाँदा एउटा काम गर्न लाग्ने समय घट्दै गएको देखिन्छ । यस्तो एउटा मान बढ्दा अर्को मान घट्दै जाने चलको सम्बन्धलाई अप्रत्यक्ष विचरण भनिन्छ । यहाँ चल भन्नाले मानिसको सङ्ख्या र एउटा काम सक्न लाग्ने समय बुझिन्छ ।

अप्रत्यक्ष विचरण : दुईओटा चरमध्ये एउटा चर बढ्दा अर्को चर घट्ने अथवा एउटा चर घट्दा अर्को चर पनि बढ्ने सम्बन्धलाई अप्रत्यक्ष विचरण भनिन्छ ।

हामीले माथि अध्ययन गरेका प्रत्यक्ष विचरण र अप्रत्यक्ष विचरणको सम्बन्ध प्रयोग गरी

गणितीय समस्या समाधान गर्न सकिन्छ । यसभन्दा तल केही उदाहरण दिइएको छ । अध्ययन गरी अभ्यासमा दिइएका समस्या समाधान गर्नुहोस् ।

उदाहरण 1

6 ओटा टोपीको रु 900 पर्छ भने 17 ओटा टोपको कति रुपियाँ पर्छ ? हिसाब गर्नुहोस् ।

समाधान :

पहिलो विधि : ऐकिक नियमबाट

थाहा दिइएको : 6 ओटा टोपीको मूल्य रु 900 पर्छ ।

पत्ता लगाउनुपर्ने 17 ओटा टोपीको मूल्य कति पर्छ ?

यस प्रश्नमा पत्ता लगाउनुपर्ने मूल्य हो । त्यसैले थाहा दिइएको वाक्यलाई पत्ता लगाउनुपर्ने सूचनालाई दाहिनेतिर पर्ने गरी लेखौँ :

6 ओटा टोपीको मूल्य रु 900 पर्छ ।

[पत्ता लगाउनुपर्ने मूल्य हो । त्यसैले मूल्य पहिले नै दाहिनेतिर छ ।]

1 ओटा टोपीको मूल्य रु $\frac{900}{6}$ पर्छ ।

[∵ धेरैको मूल्य दिइएकामा एउटाको मुल्य पत्ता लगाउन जम्मा मूल्यलाई सङ्ख्याले भाग गर्नुपर्छ । त्यसैले रु 900 लाई 6 ले भाग गरेको । यो ऐकिक नियम हो ।]

=17 ओटा टोपीको मूल्य रु $\frac{900}{6} \times 17$ पर्छ ।

[∵ एउटा टोपीको मूल्यलाई पत्ता लगाउनुपर्ने सङ्ख्याल 17 ले गुणन गर्दा 17 टोपीको जम्मा मूल्य पत्ता लाग्दछ । यो गुणन क्रिया पनि हो । यो नियम पनि ऐकिक नियम हो ।]

$$= \text{रु } \frac{\cancel{900}^{150}}{\cancel{6}_{1}} \times 17 \text{ पर्छ ।}$$

$$= \text{रु } 2550 \text{ पर्छ ।}$$

अतः 17 ओटा टोपीको रु 2550 पर्छ ।

दोस्रो विधि : विचरणको सम्बन्धबाट

माथिको समाधान ऐकिक नियमबाट गरिएको हो । ऐकिक नियमको छोटो रूप प्रत्यक्ष र अप्रत्यक्ष विधि हो । अब प्रत्यक्ष र अप्रत्यक्ष विधिबाट सोही समस्या छोटकरीमा समाधान गरिहेरौँ :

टोपीको सङ्ख्यालाई एउटा चर र मूल्यलाई अर्को चर बनाएर तालिकामा राखौँ । यहाँ टोपीको सङ्ख्या बढ्दा जम्मा मूल्य पनि बढ्ने हुनाले यो सम्बन्ध प्रत्यक्ष विचरणको समस्या हो । प्रत्यक्ष विचरणमा पत्ता लगाउनुपर्ने मानलाई x मानेर सङ्ख्या र मूल्यका अनुपातलाई जस्ताको तस्तै तुलना गरिन्छ । तलको तालिका हेर्नुहोस् :

[प्रत्यक्ष विचरणमा चरलाई अनुपातमा राखी जस्ताको तस्तै अनुपातलाई बराबर वा समानुपातको रूपमा लेखिन्छ ।]

टोपीको सङ्ख्या	मूल्य रु
6	900
17	X

अनुपातलाई समानुपातको रूपमा लेख्दाः

$$\frac{6}{17} = \frac{900}{x}$$

अथवा, $5x = 900 \times 17$

अथवा, $x = \dfrac{900 \times 17}{6} = 2250$

अतः 17 ओटा टोपीको मूल्य रु. 2550 पर्छ ।

माथिका दुई विधि तुलना गरी हेर्नुभयो होला । कुन विधि तपाईँलाई सजिलो लाग्छ, सोही विधिबाट तपाईँ समस्या समाधान गर्न सक्नुहुने छ ।

उदाहरण 2

एउटा सिबिरमा 50 जना मानिसलाई 54 दिनलाई पुग्ने खाना छ भने उक्त खानाले 60 जनालाई कति दिनलाई पुग्ला ?

विधि (क) ऐकिक नियमबाट समस्याको समाधान

थाहा दिइएको : 50 जनालाई 54 दिनलाई पुग्ने खाना छ।

पत्ता लगाउनुपर्ने: 60 जनालाई खानाले कति दिन पुग्छ ?

ऐकिक नियममा पत्ता लगाउनुपर्ने चरको मानलाई दाहिनेतिर पर्ने गरी थाहा दिइएको वाक्यलाई लेख्नुपर्छ । यहाँ पत्ता लगाउनुपर्ने दिनको सङ्ख्या हो । त्यसैले दिनलाई दाहिनेतिर पर्ने गरी लोखौँ । प्रश्नमा पहिले नै दिन दाहिनेतिर छ ।

50 जनालाई 54 दिनलाई पुग्ने खाना छ ।

1 जनालाई 54×50 दिन पुग्छ । [$\because$ खाना खाने मान्छेको सङ्ख्या 50 जनाबाट एकजनामा झर्दा खानाले धेरै दिन पुग्छ । त्यसैले यो अप्रत्यक्ष विचरणको सम्बन्ध हो किनकि एउटा चर घट्दा अर्को चर बढ्छ ।]

60 जनालाई $\frac{54 \times 50}{60}$ दिन पुग्छ । [$\because$ एक जनालाई धेरै दिन पुग्ने खानाले 60 जनालाई थोरै दिन पुग्छ । यसरी थोरै मान हुने मान पत्ता लगाउन भाग गरिन्छ । यो अप्रत्यक्ष विचरणको नै सम्बन्ध हो ।]

$= 45$

अत: 60 जनालाई उक्त खानाले 45 दिन मात्र पुग्छ ।

माथिको समाधानमा भनिए जस्तै खाना खाने मान्छेको सङ्ख्या बढ्दा खानाले पुग्ने दिन थोरै हुन्छ । त्यसैले यो अप्रत्यक्ष विचरणको समस्या हो भन्ने प्रस्ट भयो । अब यो अप्रत्यक्ष विचरणको समस्या समाधान गर्न अप्रत्यक्ष विचरणको नियमअनुसार तल समाधान गरेको हेरौँ :

[अप्रत्यक्ष विचरणमा चरहरूलाई अनुपातमा राखी एउटा अनुपातलाई उल्टो पारेर बराबर वा समानुपातको रूपमा लेखिन्छ ।]

मानिसको सङ्ख्या	खान पुग्ने दिन
50	54
60	X

अब माथिका चरहरूलाई अनुपातको रूपमा प्रस्तुत गरी पछिल्लो अनुपातलाई उल्टाएर समानुपातको रूपमा लेखौँ:

$$\frac{50}{60} = \frac{x}{54}$$

अथवा, $50 \times 54 = 60 \times x$

अथवा, $x = 45$

अतः 60 जनालाई सो खाना 45 दिनसम्म पुग्छ ।

सारांश : मानिसको सङ्ख्या बढ्दै जाँदा उनीहरूले प्रतिदिन काम गर्ने दर (कार्यघण्टा) घट्ने र मानिसको सङ्ख्या घट्दै जाँदा प्रतिदिन काम गर्ने दर बढ्छ । त्यस्तै दैनिक कार्यघण्टा घटाउँदा काम सम्पन्न गर्न आवश्यक दिन बढ्ने र दैनिक कार्यघण्टा बढाउँदा काम सम्पन्न गर्न आवश्यक दिन घट्ने हुन्छ । त्यसै गरी मानिसको सङ्ख्या बढ्दा काम पूरा हुन लाग्ने दिन घट्ने र मानिसको सङ्ख्या घट्दा काम पूरा हुन लाग्ने दिन बढ्ने हुन्छ । त्यसैले प्रति दिन काम गर्ने घण्टा र मानिसबिच तथा प्रति दिन काम गर्ने घण्टा र काम पूरा हुन लाग्ने दिन बिच, मानिस र काम पूरा हुन लाग्ने दिन बिच पनि अप्रत्यक्ष विचरण हुन्छ ।

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. तलका तथ्य प्रत्यक्ष विचरण (Direct variation) भए D र अप्रत्यक्ष विचरण (Indirect variation) भए I चिह्न लगाउनुहोस् :

(क) आयतको लम्बाइ समान राख्दा त्यसको चौडाइसँग त्यसको क्षेत्रफल

(ख) विद्यालयमा भएका विद्यार्थी सङ्ख्या र निश्चित खाद्यान्नले खान पुग्ने दिनबिचको सम्बन्ध

(घ) गाडीको गति र त्यसले पार गरेको दुरीबिचको सम्बन्ध

(ङ) गाडीको गति र तोकिएको दुरी पार गर्न लाग्ने समय

2. यदि 20 ओटा कलमको मूल्य रु. 300 पर्छ भने 50 ओटा कलमको मूल्य कति होला ?

3. एउटा मानिसले 50 मिनेटमा 5 किलोमिटर दौड सम्पन्न गर्छ भने कति 4 घण्टामा सोही गतिमा कति दुरी पार गर्छ ?

4. एउटा कारले 30 किलोमिटर प्रति घण्टाले गुड्दा कुनै दुरी 12 घण्टामा एउटा दुरी पूरा गर्छ । यदि उक्त ट्रकको गति 25 किलोमिटर प्रति घण्टा भयो भने उक्त दुरी कति घण्टामा पार गर्ला ?

5. कुनै एउटा काम पूरा गर्न 15 जना कामदारलाई 25 दिन लाग्छ । उक्त काम 10 दिनमा सिध्याउन कति जना कामदार थप्नुपर्ला ? दशदिनमा सक्न लाग्ने मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाई थप्नुपर्ने मानिस पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. कुनै काम पूरा गर्न 30 जनालाई 45 दिन लाग्छ । यदि कामदार घटाएर 20 जना बनाइयो भने उक्त काम कति दिनमा सकिएला ?

7. एउटा छात्रावासमा 100 जना विद्यार्थीलाई 10 दिन पुग्ने रासन छ । यदि उक्त खाना 15 दिनसम्म पुऱ्याउनुपर्ने भयो भने कति जना विद्यार्थी घटाउनुपर्छ ?

8. 3 के.जी. स्याउ र 4 के.जी. सुन्तलाको मूल्य रु. 500 पर्छ । यदि एक के.जी. सुन्तलाको रु. 50 पर्छ भने एक के.जी. स्याउको कति रुपियाँ पर्छ ?

9. 10 ओटा कमिज र 20 ओटा पाइन्टको रु 50000 पर्छ । यदि एउटा कमिजको रु. 1000 पर्छ भने एउटा पाइन्टको कति रुपियाँ पर्छ ?

10. 5 ओटा गाई र 2 ओटा गोरुको जम्मा मूल्य रु.1,35,000 छ । यदि एउटा गोरुको मूल्य रु.17,500 भए एउटा गाईको मूल्य कति होला ?

11. यदि 10 जना ज्यामीले दैनिक समान ज्याला पाउँदा 30 दिनमा रु 450000 कमाइ गर्छन् भने

(क) 1 जना ज्यामीले 1 दिनमा कति कमाउँछ ?

(ख) 7 जना ज्यामीले 7 दिनमा कति कमाउँछन् ?

12. यदि 48 जना मानिसलाई 30 दिनका लागि 700 के.जी. चामल चाहिन्छ भने 40 जना मानिसलाई 36 दिनका लागि कति के.जी. चामल चाहिएला ?

13. यदि 25 जना मानिसलाई 30 दिनका लागि 900 के.जी. चामल चाहिन्छ भने 50 जना मानिसलाई 30 दिनका लागि कति के.जी. चामल चाहिएला ?

14. 10 जना मानिसले प्रति दिन 7 घण्टाका दरले 2 दिनमा एउटा सडक निर्माण गर्न सक्छन् भने समान नाप भएको सडक 5 जना मनिसले 14 दिनमा प्रतिदिनको कति घण्टाको दरले काम गर्दा निर्माण सम्पन्न गर्न सक्छन् ?

15. एउटा 54 मि. लामो पर्खाल 18 जना मानिसले 10 दिनमा बनाउन सक्छन् भने 66 मि.लामो पर्खाल 22 दिनमा निर्माण सम्पन्न गर्न समान क्षमता भएका मानिस कति जना चाहिएलान् ?

16. 20 जना मानिसले 40 मि. लामो र 20 मि. चौडा भएको पार्क बनाउन 25 दिन लाग्छ भने, 50 जना मानिसलाई 50 मि. लामो र 40 मि. चौडा भएको पार्क बनाउन कति दिन लाग्ला ?

17. यदि 25 जना मानिसले घण दिनमा रु.5,00,000 कमाउछन् भने

(क) 1 जना मानिसले 1 दिनमा कति कमाउँछन् ?

(ख) कति जना मानिसले 10 दिनमा रु.5,00,000 कमाउँछन् ?

(ग) 25 जना मानिसलाई रु.1,00,000 कमाउन कति दिन लाग्ला ?

(घ) 5 जना मानिसले 40 दिनमा कति कमाउँछन् ?

पाठ 9 साधारण ब्याज
(Simple Interest)

परिचय

बैङ्क तथा सहकारी जस्ता वित्तीय संस्थाले नागरिकलाई ब्याज लिने उद्देश्यले आवश्यकताअनुसार धितो राखेर ऋण दिन्छन् । कुनै कुनै सहकारीले धितो नराखेर पनि ऋण दिने गरेका छन् । कतै आमा समूहले जम्मा गरेको रकम पनि समूहका सदस्यलाई ब्याज तिर्ने गरी सापटी दिन्छन् । आजभोलि गाउँगाउँमा सहकारी खुलेको छन् । सहकारीले पनि सहकारीका सदस्यलाई ऋण दिने गरेका छन् । ती सबै संस्थाले ऋण लिने नागरिकलाई संस्थाले दिएको ऋणका अलवा थप रकम लिन्छन् जसलाई हामी ब्याज भन्छौँ ।

माथि लेखिएको अनुच्छेदमा धितो, ब्याज, ऋण जस्ता शब्द प्रयोग भएका छन् । ती शब्दको अर्थ के हो बुझ्नुभएको छ ?

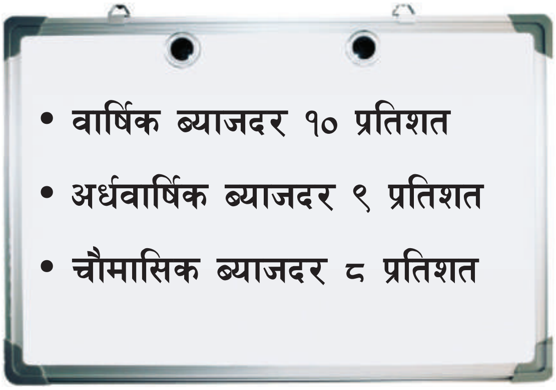
ऋण : कसैबाट तिर्ने गरी लिएको सापटी रकम । सो सापटि लिएको रकमलाई सावाँ पनि भनिन्छ ।

ब्याज : ऋण सापटी लिएर रकम आफूले भोगचलन गरेबापत ऋण दिने संस्थाले लिने थप रकमलाई ब्याज भनिन्छ ।

धितो : ऋण लिनका लागि बैङ्क तथा वित्तीय संस्थाले सुरक्षणको रूपमा ऋण लिने नागरिकको घर, खेत, सुन वा गरगहना ऋण दिने संस्थालाई राख्न दिन्छन् । यस्तो सुरक्षणको अचल सम्पत्तिलाई धितो भनिन्छ । यदि ऋण लिने नागरिकले लिएको ऋण नतिरेको खण्डमा राखिएको धितो बेचेर आफ्नो सावाँ र ब्याज असुल गर्छन् र बाँकी रकम ऋण लिने व्यक्तिलाई फिर्ता गर्छन् ।

उदाहरणका लागि, राष्ट्रिय वाणिज्य बैङ्कले रामलाई दुई वर्षका लागि रु 5000 कृषि ऋण

दियो। बैङ्कले सावाँ रकमको वार्षिक 10 प्रतिशत साधारण ब्याज लिने सहमति भएछ। उनले दुई वर्षमा कति ब्याज तिर्नुपर्ला ?



समाधान :

वार्षिक ब्याज 10 प्रतिशत भन्नाले,

रु. 100 को साधारण ब्याज 1 वर्षमा रु 10 हुन्छ।

रु. 1 को साधारण ब्याज 1 वर्षमा रु $\frac{10}{100}$ हुन्छ। [∵ ऐकिक नियमबाट]

रु. 5000 को साधारण ब्याज 1 वर्षमा $\frac{10}{100} \times 5000$ हुन्छ।

रु. 5000 को साधारण ब्याज 2 वर्षमा ब्याज $\frac{10}{100} \times 5000 \times 2 =$ रु 1000 हुन्छ।

माथिको साधारण ब्याजलाई हर र अंश मिलाएर लेख्दा, $\frac{5000 \times 2 \times 10}{100}$ लेख्न सकिन्छ।

यहाँ, रु 5000 रामले बैङ्कबाट लिएको ऋण रकम हो। यसलाई सावाँ (Principal) भनिन्छ।

ऋण तिर्ने समय (Time) लाई वर्षमा उल्लेख गरिएको छ। ऋण तिर्ने समय 2 वर्ष छ।

वार्षिक ब्याजदर (Rate of interest) 10 प्रतिशत छ।

साधारण ब्याज (Simple Interest)

$$= \frac{5000 \times 2 \times 10}{100}$$

$$= \frac{\text{Principal} \times \text{Time} \times \text{Rate of interest}}{100}$$ लेख्न सकिन्छ।

यसलाई छोटकरीमा, $SI = \frac{P \times T \times R}{100}$ लेख्न सकिन्छ जुन साधारण ब्याज निकाल्ने सूत्र हो। सूत्र प्रयोग गरेर पनि ब्याज छिटो निकाल्न सकिन्छ।

माथिको समस्यालाई सूत्र प्रयोग गरी हिसाब गरौँ है त :

प्रश्न अनुसार,

सावाँ (P) = रु 5000

वार्षिक ब्याजदर (R) = 10 प्रतिशत

समय (T) = 2 वर्ष

साधारण ब्याज = रु

हामीलाई थाहा छ,

$$\text{साधारण ब्याज (SI)} = \frac{P \times T \times R}{100}$$

$$= \frac{5000 \times 2 \times 10}{100}$$

$$= 1000$$

अतः दुई वर्षमा रामले तिर्नुपर्ने ब्याज रकम रु 1000 हुन्छ।

साधारण ब्याज: बैङ्क तथा वित्तीय संस्थाले निश्चित अवधिमा ऋण रकम लिएबापत थप रकम लिने गर्छन्। यदि ब्याज रकम वार्षिक गणना गरिन्छ भने सो रकम साधारण ब्याज हो। साधारण ब्याज लिने संस्थाले ब्याज नतिरेमा ब्याजको पनि ब्याज लगाउन पाउँदैनन्। त्यसैले साधारण ब्याज ऋण लिएपछि तिर्ने बेलामा एकैपटक ब्याजको हिसाब $\frac{P \times T \times R}{100}$ सूत्र प्रयोग गरी लिने ब्याज हो। यो सूत्रमा P भन्नाले सावाँ (Principal), T भन्नाले ऋण तिर्ने जम्मा समय (Time) र R भन्नाले पुरै समयको वार्षिक ब्याज दर भन्ने बुझिन्छ।

निश्चित समयमा ब्याज नतिरेमा ब्याजलाई पनि सावाँमा थप गरी पुनः ब्याज लिने वित्तीय संस्थाहरूको प्रचलन हुन्छ। त्यस्तो अवस्थामा लिइने ब्याजलाई साधारण ब्याज भनिँदैन।

उदाहरण 1

शीलाले एउटा बैङ्कबाट रु 7000 वार्षिक 10 प्रतिशत साधारण ब्याजदरमा ऋण लिइन् । उनले तीन वर्षको अन्तमा सो रकमको ब्याज कति तिर्नुपर्छ ?

समाधान :

थाहा दिइएको : लिइएको सावाँ रकम (P) = रु. 7000

साधारण ब्याजदर (R) = 10%

ऋण तिर्ने अवधि (Time) = 3 वर्ष

साधारण ब्याज = रु

हामीलाई थाहा छ,

$$\text{साधारण ब्याज (SI)} = \frac{P \times T \times R}{100}$$

$$= \frac{(7000 \times 3 \times 10)}{100}$$

$$= 2100$$

अतः शीलाले तीन वर्षको अन्तमा रु 2100 ब्याज तिर्नुपर्छ ।

नोटः साधारण ब्याजका हिसाबमा सूत्र प्रयोग गर्दा समयलाई सधैँ वर्षमा गणना गर्नुपर्छ । समय यदि महिनामा दिइएको छ भने महिनालाई 12 ले भाग गरेर वर्षमा बदल्न सकिन्छ भने दिनलाई वर्षमा बदल्दा 366 ले भाग गर्नुपर्छ किनकि एक वर्षमा 12 महिना हुन्छ भने एक वर्षमा 365 दिन हुन्छ ।

जानिराखौँ :

माथिको उदाहरणमा शीलाले सावाँ + ब्याज गरी जम्मा कति तिर्छिन् ? भन्न सक्नुहुन्छ ? पक्कै पनि तपाईँले सोच्नुभयो होला रु. 7000 + रु. 700 = रु. 7700 तिर्नुपर्छ । यसरी सावाँ र ब्याज मिसाएर तिर्ने रकमलाई मिश्रधन भनिन्छ । मिश्रधन भनेको सावाँ र ब्याज मिसाएर तिरेको रकम हो । त्यसैले,

मिश्रधन (Amount) = सावाँ + ब्याज

अर्थात्, Amount (A) = P + I

यहाँ, A ले मिश्रधन (Amount) र I ले साधारण ब्याज (Simple interest or interest) बुझाउँछ ।

मिश्रधन (Amount): सावाँ र ब्याज जोडेर आउने रकमलाई मिश्रधन भनिन्छ । मिश्रधन ऋण फिर्ता गर्ने बेलामा सावाँ ब्याज दुवै तिर्ने अवस्थामा हिसाब गरिन्छ । मिश्रधन निकाल्ने सूत्र, $A = P + I$ हो ।

क्रियाकलाप 1

तलको तालिका अध्ययन गर्नुहोस् र खाली कोठामा आउने मान हिसाब गरेर लेख्नुहोस् :

सावाँ (P)	**ब्याज** (I)	**मिश्रधन** (A) = P + I
रु. 1000	रु. 500	रु. ....
रु. 4600	रु. 1200	रु. ....
रु. 15500	रु. 2500	रु. ....

क्रियाकलाप 2.

मिश्रधन, ब्याज र सावाँको सम्बन्धबाट खाली कोठामा आउने मान निकाल्नुहोस् :

मिश्रधन (A)	**सावाँ** (P)	**ब्याज** (I)
रु. 9000	रु. 7500	रु. ....
रु. 17500	रु.	रु. 1350
रु. 20300	रु.	रु. 5300
रु.	रु. 7600	रु. 1270
रु.	रु. 9900	रु. 2100

माथिको तालिकाबाट सावाँ, ब्याज र मिश्रधन निकाल्न कुनै एक जानकारी थाहा नभए कसरी निकाल्न सकिन्छ भनी निष्कर्ष निकाल्नुहुन्छ ? लेख्नुहोस् । तपाईँले लेखेको निश्कर्ष तलको सूचनासँग मिल्यो कि मिलेन जाँच्नुहोस्

निष्कर्ष

- मिश्रधनबाट सावाँ घटाउँदा ब्याज आउँछ ।
- मिश्रधनबाट ब्याज घटाउँदा सावाँ आउँछ ।
- सावाँ र ब्याज जोड्दा मिश्रधन आउँछ ।

मिश्रधन पत्ता लगाउने अर्को विधि :

मिश्रधन पत्ता लगाउन सिधै सूत्र पनि प्रयोग गर्न सकिन्छ । सो सूत्र कसरी बन्छ हेरौँ :

यदि रु. P रकमको T वर्षका लागि R% प्रतिवर्ष ब्याजदरले ब्याज रु.I हुन्छ भने मिश्रधन कति हुन्छ ?

यहाँ, मिश्रधन = सावाँ + ब्याज

अर्थात् $A = P + I$ ....(i)

हामीलाई थाहा छ,

$$I = \frac{PTR}{100} \text{...........(ii)}$$

(i) र (ii) लाई दुवैलाई मिलाउँदा

$$A = P + \frac{PTR}{100}$$

$\therefore A = \dfrac{P(100 + TR)}{100}$ यो मिश्रधन पत्ता लगाउने सूत्र हो ।

यदि P, T, R सबै दिइएको छ भने यो सूत्र प्रयोग गरेर पनि सिधै मिश्रधन पत्ता लगाउन सक्नुहुने छ ।

उदाहरण 2

समयलाई वर्षमा बदल्नुहोस् :

(क) 26 महिना (ख) 300 दिन

समाधान :

(क) 26 महिनालाई वर्षमा बदल्दा महिनालाई 12 ले भाग गरिन्छ। अतः,

$$26 \text{ महिना} = \frac{26}{12} \text{ वर्ष} = \frac{13}{6} \text{ वर्ष} = \frac{21}{6} \text{ वर्ष}$$

(ख) 300 दिनलाई वर्षमा बदल्दा दिनलाई 365 ले भाग गरिन्छ।

$$\text{अतः } 300 \text{ दिन} = \frac{300}{365} \text{ वर्ष} = \frac{60}{73} \text{ वर्ष}$$

उदाहरण 3

पेम्बाले एउटा सहकारीबाट वार्षिक 15% ब्याजदरमा रु. 7500 ऋण लिएछन्। 2 वर्षको अन्तमा उनले कति साधारण ब्याज तिर्नुपर्छ ? पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान :

यहाँ, ब्याजदर (R) = 15%

सावाँ (P) = ? 7500

समय (T) = 2 वर्ष

साधारण ब्याज = रु

हामीलाई थाहा छ,

$$\text{साधारण ब्याज (I)} = \frac{P \times T \times R}{100}$$

$$= \frac{7500 \times 2 \times 15}{100}$$

$= 2250$

अतः उक्त अवधिको साधारण ब्याज रु 2250 रहेछ ।

उदाहरण 4

सिरोजले एउटा बैंकबाट रु 10000 ऋण लिएका रहेछन् । उनले लिएको ऋण वार्षिक 12 प्रतिशत साधारण ब्याजको दरमा थियो । उनले 30 महिनामा सो ऋण तिरेछन् भने कति ब्याज रकम तिरेका होलान् ?

यहाँ, ब्याजदर (R) = 12%

सावाँ (P) = रु 10000

समय (T) = 30 महिना = $\frac{30}{12}$ वर्ष = $\frac{10}{4}$ वर्ष

[∵ साधारण ब्याज निकाल्न समयलाई वर्षमा प्रयोग गरिन्छ ।]

साधारण ब्याज = रु

हामीलाई थाहा छ,

साधारण ब्याज (I) $= \frac{P \times T \times R}{100}$

$= \frac{10000 \times 10 \times 10}{100 \times 12}$

$= 1000$

अतः 30 महिनाको जम्मा ब्याज रु 1000 रहेछ ।

$= 2250$

अतः उक्त अवधिको साधारण ब्याज रु 2250 रहेछ ।

अभ्यासका लागि प्रश्न

अभ्यास (क)

1. तलका प्रश्नको छोटो उत्तर दिनुहोस् :

(क) साधारण ब्याज भनेको के हो ?

(ख) सावाँ भनेको के हो?

(ग) ब्याजदर भन्नाले के बुझिन्छ ?

(घ) 30 महिनालाई वर्षमा लेख्नुहोस् ।

2. ऐकिक नियमबाट साधारण ब्याज पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) सावाँ रु.1000, ब्याजदर 10% समय 2 वर्ष

(ख) सावाँ रु.2500 ब्याजदर 12.5%, समय 3 वर्ष

3. सूत्र प्रयोग गरी साधारण ब्याज पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) सावाँ रु.4000, ब्याजदर 15%, समय 4 वर्ष

(ख) सावाँ रु.5500, ब्याजदर 12%, समय 3 वर्ष 6 महिना

(ग) सावाँ ट000 ब्याजदर 10% समय 2 वर्ष 60 दिन

4. समय (T) पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) सावाँ रु.1500, ब्याजदर 10%, ब्याज रु.900

(ख) सावाँ रु.1,2000 ब्याजदर 12%, ब्याज 1400

(ग) सावाँ रु.3600 ब्याजदर 12% ब्याज रु.900

5. ब्याजदर (R) पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) सावाँ 10,000, समय 5 वर्ष, ब्याज 5000

(ख) सावाँ रु.45000, समय 3 वर्ष 6 महिना, ब्याज रु. 6750

(ग) सावाँ 2,160, समय 4 वर्ष ब्याज रु.648

6. **सावाँ (P) पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) ब्याजदर 9%, समय 9 वर्ष, ब्याज रु.1620

(ख) ब्याजदर 9% समय = 2 वर्ष, ब्याज रु.3996

7. **छिरिङले वार्षिक 5% का दरले ब्याज पाउने गरी रु.10,000 बैङ्कमा जम्मा गरिन् भने 2 वर्षपछि उनले कति ब्याज पाउँछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।**

8. **आङकाजीले वार्षिक 6% ब्याजदरमा बैङ्कबाट रु.24,000 ऋण लिए भने 3 वर्षपछि उनले बैङ्कमा कति ब्याज बुझाउनुपर्ला ?**

9. **सुवर्णले राष्ट्रिय वाणिज्य बैङ्कबाट कुनै रकमको 3 वर्षपछि रु.1200 ब्याज पाए । यदि उनले 10% ब्याजदरमा उक्त रकम ब्याजवापत पाएका रहेछन् भने उनले कति रकम जम्मा गरेका रहेछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।**

10. **सरिस्माले रु.7,600 बैङ्कमा राखे बापत बैङ्कले 3 वर्षपछि रु.1,254 ब्याज दियो भने ब्याजदर कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।**

11. **10% ब्याजदरले रु.1,080 को 4 वर्षमा आउने ब्याज बराबरको रकम पाउनका लागि रु. 900 लाई 12% ब्याजदरले कति वर्ष जम्मा गर्नुपर्ने हुन्छ ?**

अभ्यास (ख)

1. **सावाँ र ब्याज जोडी मिश्रधन पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) सावाँ रु.10,000, समय = 2 वर्ष ब्याजदर (R) = 5%

(ख) सावाँ रु. 2,160, समय = 3 वर्ष, ब्याजदर 3.5%

(ग) सावाँ रु. 55,500, समय 2 वर्ष ब्याजदर 7.5%

2. **आनन्दले कृषिका लागि बैङ्कबाट 10% ब्याजदरमा रु. 1,00,000 ऋण लिइन्। यदि उनले 18 महिनापछि सावाँ र ब्याज गरी एकमुष्ट रकम तिरिन् भने जम्मा कति मिश्रधन तिरिन् होला ?**

3. **रु. 35,000 को 3% ब्याजदरले 54 महिनामा जम्मा कति रकम होला, पत्ता लगाउनुहोस्।**

4. **6 महिनामा ब्याजबापत रु.740 प्राप्त गर्न 10% ब्याजदरले कति रकम बैङ्कमा जम्मा गर्नुपर्ला ?**

5. **10% ब्याजका दरले 2 वर्ष 6 महिनामा कति रुपियाँ जम्मा गर्दा मिश्रधन रु. 8750 हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस्।**

6. **मीनाले वार्षिक 5% ब्याजदरले रु.40,000 बैङ्कमा बचत गर्दा आउने ब्याजको 5% आयकर तिर्नुपर्छ भने 4 वर्षपछि उनले जम्मा कति रकम प्राप्त गर्छिन् ? (जम्मा पाउने ब्याजबाट आयकर घटाएर पाउने रकम पत्ता लगाउनुहोस्।)**

7. **एउटा सहकारीले रु. 50,000 को वार्षिक 16% ब्याजदरले 3 महिनामा प्राप्त हुने ब्याजमा बैङ्कले 15% कर लिन्छ भने 6 महिनापछि एकमुष्ट जम्मा कति रकम प्राप्त होला ?**

9. रु. 10,800 को वार्षिक 10% ब्याजदरमा 4 वर्षमा आउने ब्याजको 5% कर तिर्नुपर्छ भने 4 वर्षपछि एकमुष्ट कति रकम प्राप्त होला ?

परियोजना कार्य

आफ्नो नजिकैको वित्तीय संस्था वा बैङ्कमा जानुहोस् वा इन्टरनेटबाट खोजी गरी फरक फरक खाताको ब्याजदरको जानकारी लिनुहोस् र कुन खातामा रकम जम्मा गर्दा वार्षिक रूपमा बढी ब्याज पाइँदो रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् र कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

अभ्यास (क)

1. 1000
2. 4320
3. 4000
4. 5.5%
5. 4 year

अभ्यास (ख)

1. Rs.11000, Rs. 2386.8, Rs. 63825
2. Rs.115000
3. Rs. 4725
4. Rs.14800
5. Rs. 7000
6. Rs.47600, Rs.7600
7. Rs. 53400
8. Rs. 53400
9. Rs. 14904

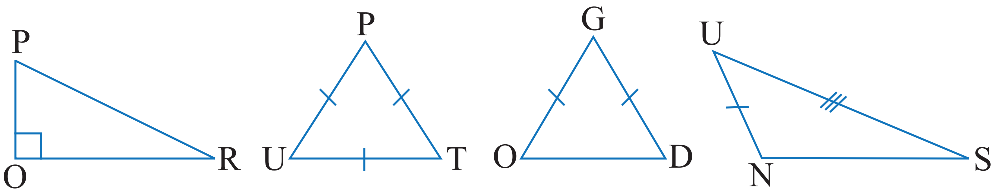
एकाइ 3 क्षेत्रमिति
(Mensuration)

पाठ 10 त्रिभुज र चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area triangle and quadrilateral)

षड्मुखा र घनको क्षेत्रफल कसरी पत्ता लगाउने भन्ने बारेमा तह 3 भाग 1 मा अध्ययन गरिसकेका छौँ । अब हामी यो तहमा त्रिभुज र चतुर्भुजको क्षेत्रफल कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ, त्यस बारेमा हेरौँ है त ।

त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of Triangles)

के चित्रमा देखाइएका त्रिभुज एकै किसिमका छन् त ? पक्कै पनि छैनन् । यिनीहरूको क्षेत्रफल कसरी पत्ता लगाउने होला ?



हो फरक किसिमका त्रिभुजको फरक फरक सूत्रहरू प्रयोग गरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ,अब त्यस बारेमा अध्ययन गरौँ ।

समकोण त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of Right angled Triangle)

एउटा आयताकार पेपर लिनुहोस् जसको लम्बाइ l र चौडाइ b छ, त्यसैले आयतको क्षेत्रफल = $l \times b$ वर्ग एकाइ हुन्छ । अनि त्यसलाई विकर्णबाट बराबर गरी टुक्राउनुहोस् । दुवै टुक्रा समकोण त्रिभुज बन्छन् । त्यसमध्ये एउटा टुक्रालाई अर्को टुक्रामा खप्टाउँदा बराबर भएर खप्टिन्छ, त्यसैले दुवै टुक्राको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ । जुन तल चित्रमा देखाइएको छ :

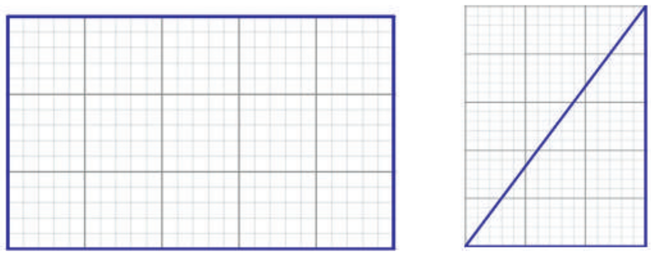
त्यसकारण आयतको क्षेत्रफल = $2 \times$ समकोण त्रिभुजको क्षेत्रफल

अतः समकोण त्रिभुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आयतको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times l \times b$

फेरि, त्रिभुजको आधारको लम्बाइ b र लम्ब p भए,

समकोण त्रिभुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times p \times b$

समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजका दुई भुजा आधार b र लम्ब p बराबर हुन्छन् त्यसैले समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}p^2$ or $\frac{1}{2}b^2$ हुन्छ।



माथिको ग्राफमा, लम्बाइ (l) = छ एकाइ र चौडाइ (b) = 3 एकाइ छन्।

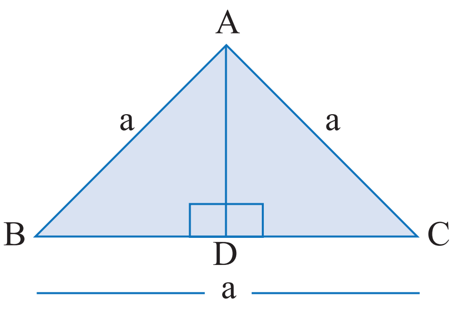
सूत्रअनुसार, आयतको क्षेत्रफल (A) = 5 × 3 = 15 वर्ग एकाइ

त्यसै गरी सँगै दिइएको त्रिभुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 5 \times 3$ = 7.छ वर्ग एकाइ

समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of equilateral triangle)

एउटा फोटोकपी पेपर लिनुहोस् र त्यसमा निश्चित नाप भएको समबाहु त्रिभुज बनाउनुहोस्। अब तपाईँले बनाएको त्रिभुजलाई कैँचीको सहायताले काटेर निकाल्नुहोस्। चित्रमा देखाइएको जस्तै गरी त्रिभुजको कुनै एउटा शीर्षकोणलाई आधा बनाउने गरी पट्याउनुहोस्। यसरी पट्याउँदा बन्ने रेखाखण्डले उक्त शीर्षकोणमा बन्ने दुई कोण र सो त्रिभुजको आधार भुजाबिचको सम्बन्ध कस्तो होला ?

सँगैको चित्र समबाहु त्रिभुज हो । यसमा मानौँ भुजाको लम्बाइ a छ। A बाट BC मा लम्ब AD खिच्नुहोस्। अब आधार BC लाई AD ले आधा गर्छ । समबाहु त्रिभुजको शीर्षकोणको अर्धकले आधार भुजालाई समद्विभाजन गर्छ।



त्यसैले, $BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$

अब, त्रिभुज ABD मा पाइथागोरस साध्यअनुसार, $AD^2 = AB^2 - BD^2$

अथवा, $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2}$

अथवा, $AD = \sqrt{a^2 - `\frac{1}{2}aj^2}$

अथवा, $AD = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2}$

अथवा, $AD = \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}}$

अथवा, $AD = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ एकाइ

अब त्रिभुजको क्षेत्रफल (A) $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ उचाइ

$= \frac{1}{2} \times a \times a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ वर्ग एकाइ

अतः समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (A) $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ क्षेत्रफल हुन्छ ।

समद्विबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of Isosceles Triangle)

दिइएको चित्र समद्विबाहु त्रिभुज हो । मानौँ, यसमा $PQ = PR = a$ र $QR = b$ छ । P बाट QR मा लम्ब PS खिचौं । जसले आधार भुजा QS लाई आधा गर्छ ।

$\therefore$ समद्विबाहु त्रिभुजको शीर्षकोणबाट आधारमा खिचिएको लम्बले आधार भुजालाई समद्विभाजन गर्छ ।

$\therefore \quad QS = SR = \frac{1}{2} \times b$

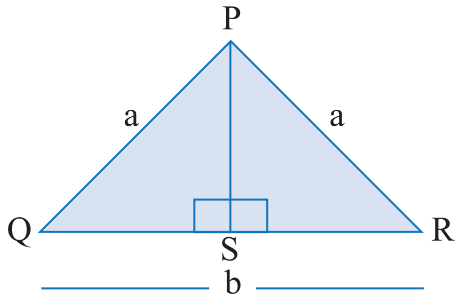
अब, मकोण त्रिभुज PQS मा, पाइथागोरस साध्यअनुसार,

$PS2 = PQ^2 - QS^2$

अथवा, $PS = \sqrt{PQ^2 - QS^2}$

अथवा, $AD = \sqrt{a^2 - `\frac{1}{5}bj^2}$

अथवा, $AD = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}b^2}$



अथवा, $AD = \sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}$

अब, समद्विबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ उचाइ

$= \frac{1}{2} \times b \times \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}$

$= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$ वर्ग एकाइ

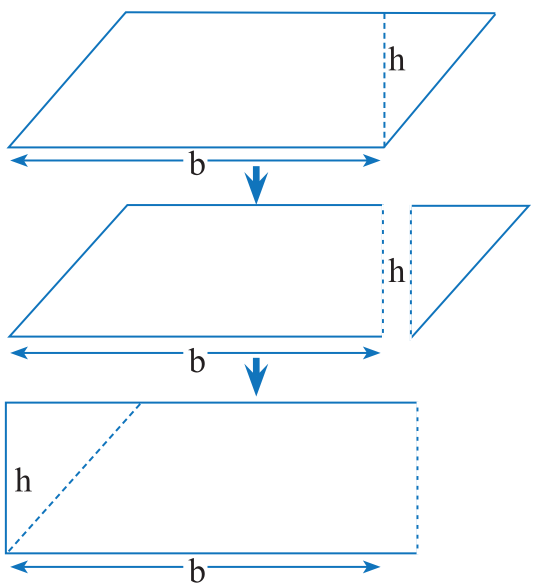
अब, समद्विबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ उचाइ

$= \frac{1}{2} \times b \times \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}$

$= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$ वर्ग एकाइ

समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of a parallelogram)

कार्डबोर्डको प्रयोग गरेर चित्रमा देखाए जस्तै आधार b र उचाइ h भएको एउटा समानान्तर चतुर्भुज बनाउनुहोस् । अनि उक्त चित्रमा तल दायाँपट्टिको शीर्षविन्दुबाट लम्ब हुने गरी कार्डबोर्डलाई पट्याउनुहोस् र पट्याइएको भागलाई काट्नुहोस् ।



अब, काटेको भाग (त्रिभुज) लाई बायाँपट्टि ल्याई

चित्रमा जस्तै जोड्नुहोस् । अब, यो कस्तो आकारको बन्यो ?

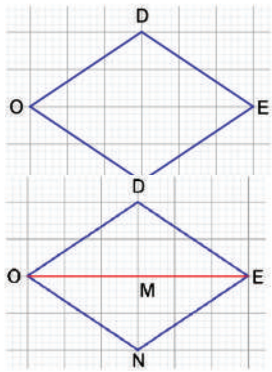
यहाँ, आयतको लम्बाइ b र चौडाइ h छ । त्यसैले आयतको क्षेत्रफल = लम्बाइ × चौडाइ = b × h हुन्छ । यहाँ, आयतको क्षेत्रफल = समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल छ ।

$\therefore$ समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल = आयतको क्षेत्रफल = $b \times h$

अतः समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल = आधार × उचाइ = b × h

समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of a Rhombus)

एउटा आयताकार वर्गाङ्कित कागज लिनुहोस् र चित्रमा दिइएको जस्तै गरी एउटा समबाहु चतुर्भुज बनाउनुहोस्। अब तपाईँले बनाएको समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल कति होला ? कसरी गर्ने होला, सोच्नुहोस्।



एउटा विकर्ण OE खिच्नुहोस्। अब, तपाईँले बनाउनुभएको समबाहु चतुर्भुज दुईओटा त्रिभुजमा विभाजन भएको छ। ए! अब त दुईओटा त्रिभुजको क्षेत्रफको योगफल नै समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल हुन्छ नि।

तसर्थ समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल

= त्रिभुज ONE को क्षेत्रफल + त्रिभुज ODE को क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 2 + \frac{1}{2} \times 6 \times 2$$

$= 6 + 6$

= 12 वर्ग एकाइ

O देखि E सम्म 6 एकाइ छ त्यसैले आधार (OE) = 6 एकाइ हुन्छ। त्यसै गरी O देखि M र M देखि N सम्मको उचाइ 2 एकाइ छ।

यहाँ, सँगैको चित्रमा समबाहु चतुर्भुज DONE का विकर्णहरू OE = d1 र DN = d2 खिचिएको छ। समबाहु चतुर्भुजका विकर्ण एक आपसमा लम्ब हुने गरी प्रतिच्छेदन हुन्छन्। $OM \perp ON$ र $DM \perp OE$ हुन्छ।

अब, समबाहु चतुर्भुज DONE को क्षेत्रफल (A) = ΔODE को क्षेत्रफल + ΔONE को क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times OE \times DM + \frac{1}{2} \times OE \times NM$$

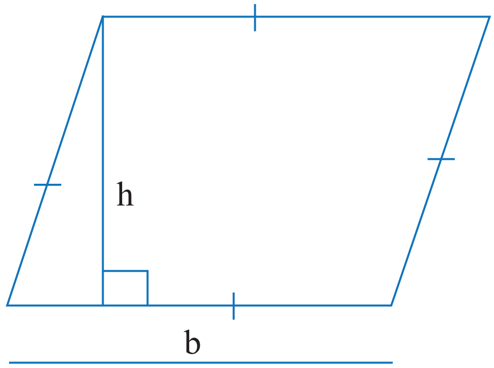
$$= \frac{1}{2} \times OE\,(DM + NM)$$

$$= \frac{1}{2} \times OE \times DN \quad (\because DM + NM) = DN, \text{ सिङ्गो टुक्रे तथ्यअनुसार})$$

$$= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

अतः समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल (A) $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$ हुन्छ।

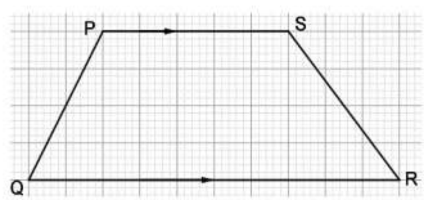
Note: 1 यदि समबाहु चतुर्भुजमा आधारको लम्बाइ र उचाइ दिएको छ भने,



समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल (A) $=$ आधार $\times$ उचाइ $= b \times h$ पनि हुन्छ ।

समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of a trapezium)

एक एकओटा वर्गाङ्कित कागज लिनुहोस् र चित्रमा दिइएको जस्तै गरी कुनै नाप भएको समलम्ब चतुर्भुज बनाउनुहोस् । अब तपाईंले बनाएको समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल कति होला ? कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?



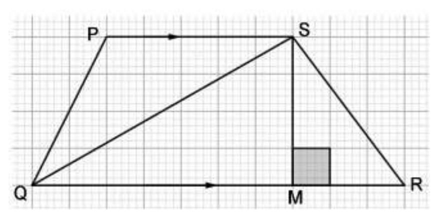
अब, दिइएको समलम्ब चतुर्भुज PQRS हो । चित्रमा PS // QR छन् । मानौँ, PS $= a$, QR $= b$ छन् । विकर्ण QS र लम्ब उचाइ SM खिचौ र (PS) $= h$ छन् ।

समलम्ब चतुर्भुज PQRS को क्षेत्रफल (A) $= \Delta$ QPS को क्षेत्रफल $+ \Delta$ QSR को क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times PS \times SM + \frac{1}{2} \times QR \times SM$

$= \frac{1}{2} \times SM \times (QR + PS)$

$= \frac{1}{2} \times h \times (a + b)$ वर्ग एकाइ



अतः समलम्ब चतुर्भुज PQRS को क्षेत्रफल (A) $= \frac{1}{2} \times h \times (a + b)$ वर्ग एकाइ

चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of quadrilateral)

चित्रमा PQRS एउटा चतुर्भुज हो । चतुर्भुजको विकर्ण QS = d हो भने शीर्षविन्दु P र R बाट विकर्ण BD मा लम्ब खिचिएका छन् ।

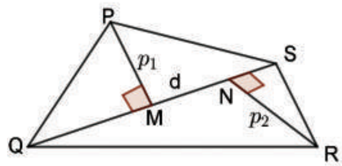
अतः ΔPQS को उचाइ (PM) = p_1 र ΔQRS को उचाइ (RN) = p_2 छ ।

अब चतुर्भुज PQRS को क्षेत्रफल (A) = ΔPQS को क्षेत्रफल + ΔQRS को क्षेत्रफल

चतुर्भुज PQRS को क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{2} \times QS \times PM + \frac{1}{2} \times QS \times RN$

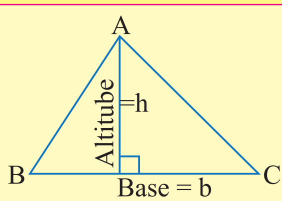
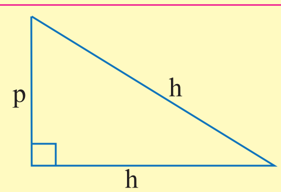
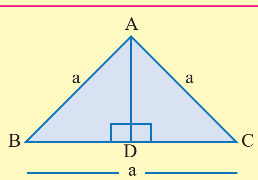
$= \frac{1}{2} \times d \times p_1 + \frac{1}{2} \times d \times p_2$

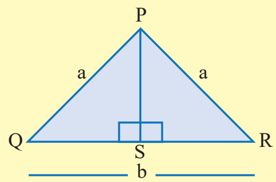
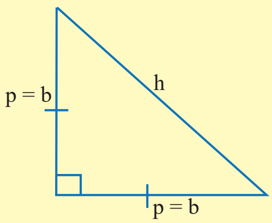
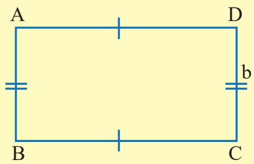
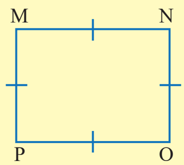
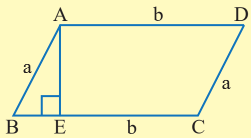
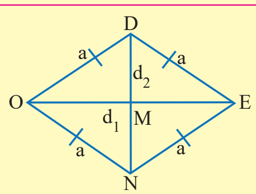
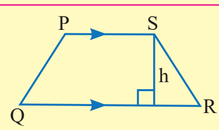
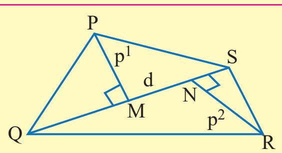
$= \frac{1}{2} \times d\,(p_1 + p_2)$



अतः चतुर्भुज PQRS को क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{2} \times d\,(p_1 + p_2)$ वर्ग एकाइ

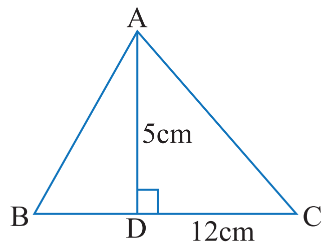
माथिका बहभुजुहरूको परिमिति र क्षेत्रफललाई निम्नानसुार तालिकामा प्रस्ततु गर्न सकिन्छ :

बहुभुजको नाम	चित्र	परिमिति	क्षेत्रफल
त्रिभुज		P = AB + BC + AC	$A = \frac{1}{2} \times b \times h$
समकोण त्रिभुज		P = p + b + h	$A = \frac{1}{2} \times p \times b$
समबाहु त्रिभुज		P = 3a	$A = \frac{\sqrt{3}}{2} \times a^2$

बहुभुजको नाम	चित्र	परिमिति	क्षेत्रफल
समद्विबाहु त्रिभुज		$P = 2a + b$	$A = \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$
समकोणी समद्विबाहु त्रिभुज		$P = 2b + h$ Or $P = 2p + h$	$A = \frac{1}{2} \times p^2$ Or $A = \frac{1}{2} \times b^2$
आयत		$P = 2(l + b)$	$A = l \times b$
वर्ग		$P = 4a$	$A = l^2$
समानान्तर चतुर्भुज		$P = 2a + 2b$	$A = p \times b$
समबाहु चतुर्भुज		$P = 4a$	$A = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$ Or, $A = b \times h$
समलम्ब चतुर्भुज		$P = PQ + QR + RS + PS$	$A = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$
चतुर्भुज		$P = PQ + QR + RS + PS$	$A = \frac{1}{2} \times p_1 \times p_2$

उदाहरण 1 : दिइएका त्रिभुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान : यहाँ,



त्रिभुज ABC मा,

आधार भुजा (BC) = 12 cm

उचाइ (AD) = 5 cm

अब सूत्रअनुसार,

$$\text{त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल (A)} = \frac{1}{2} \times BC \times AD$$

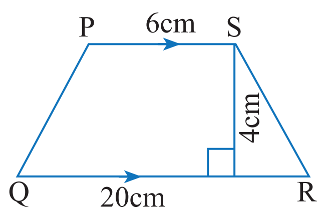
$$= \frac{1}{2} \times 12\text{ cm} \times 5\text{ cm}$$

$$= 30\text{ cm}^2$$

($\because$ ΔABC को क्षेत्रफल (A) $= \frac{1}{2}$ आधार × उचाइ)

उदाहरण 2 : दिइएका समलम्ब चतुर्भुज PQRS क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान : यहाँ,



समलम्ब चतुर्भुज PQRS मा,

आधार भुजा (QR) = a = 20 cm

र (PS) = b = 6 cm, उचाइ (h) = 6 cm

अब, सूत्रअनुसार

$\because$ स.ल.च को क्षेत्रफल (A) $= \frac{1}{2} \times h\,(a + b)$

$$\text{समलम्ब चतुर्भुज PQRS को क्षेत्रफल (A)} = \frac{1}{2} \times h\,(QR + PS)$$

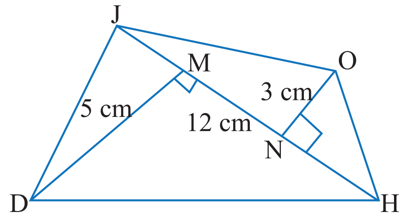
$$= \frac{1}{2} \times 4\text{cm}\,(20\text{cm} + 6\text{cm})$$

$$= 52\text{cm}^2$$

उदाहरण 3 : सँगै दिइएको चतुर्भुज DHOJ मा बिकर्ण (JH) = 12 cm लम्बहरू (DM) = 5 cm र (ON) = 3 cm भए, चतुर्भुज DHOJ को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान : यहाँ,

चतुर्भुज DHOJ मा,

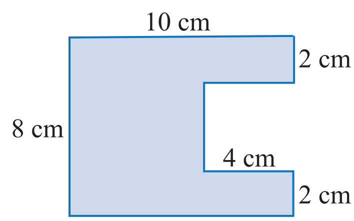


विकर्ण (JH) = 12 cm र लम्ब (DM) = p_1 = 5 cm र (ON) = p^2 = 3 cm भए अब, सूत्रअनुसार

चतुर्भुज DHOJ को क्षेत्रफल (A)

$$= \frac{1}{2} \times \text{JH (DM + ON)}$$
$$= \frac{1}{2} \times 12 \text{ cm} (5 \text{ cm} + 3 \text{ cm})$$
$$= 6 \text{ cm} (8 \text{ cm})$$
$$= 48 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 4 : सँगै दिइएको ज्यामितीय चित्रको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :



समाधान : यहाँ,

AH मा लम्ब FN खिचौँ र BC मा लम्ब EM खिचौँ ।

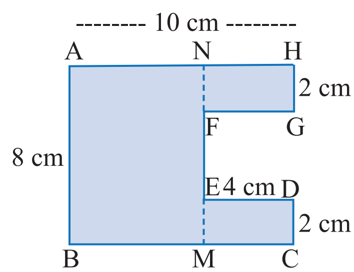
(i) आयत ABMN मा,

लम्बाइ (AB) = (l_1) = 8 cm

चौडाइ (AN) = (b_1) = 10 cm – 4 cm = 6 cm

∴ आयत ABMN को क्षेत्रफल

$(A_1) = l_1 \times b_1 = 8 \times 6 = 48 \text{ cm}^2$



(ii) आयत FGHN लम्बाइ (FG) = (l_2) = 4 cm,

चौडाइ (GH) = (b_2) = 2 cm

$\therefore$ आयत FGHN को क्षेत्रफल $(A_2) = l_2 \times b_2 = 4 \times 2 = 8\ cm^2$

(iii) आयत MCDE को लम्बाइ (DE) $= (l_3) = 4$ cm,

चौडाइ (CD) $= (b_3) = 2$ cm

$\therefore$ आयत MCDE को क्षेत्रफल $(A_3) = l_3 \times b_3 = 4 \times 2 = 8\ cm^2$

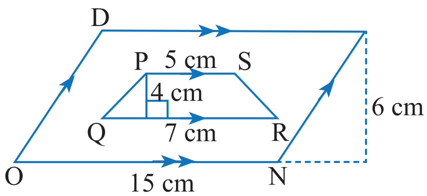
अब,

दिइएको आकृतिको क्षेत्रफल $= A_1 + A_2 + A_3$

$= 48\ cm^2 + 8\ cm^2 + 8\ cm^2$

$= 64\ cm^2$

उदाहरण 5 : सँगै दिइएको चित्रमा छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :



समाधान : यहाँ,

DONE एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।

समानान्तर चतुर्भुजको आधार (b) = 15 cm र उचाइ (h) = 6 cm छ ।

$\therefore$ समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल $(A_1) = b \times h = 15 \times 6 = 90\ cm^2$

फेरि, समलम्ब चतुर्भुज PQRS मा,

समानान्तर भुजा a = QR = 7 cm, b = PS = 5 cm उचाइ (h) = 4 cm

समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल (A_2) $= \frac{1}{2} \times h\,(a + b)$

$= \frac{1}{2} \times 4\ cm \times (7\ cm + 5cm)$

$= 2\ cm \times 12\ cm$

$= 24\ cm^2$

अब, छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल (A) $= A_1 - A_2$

$= 90\ cm^2 - 24cm^2$

$= 66\ cm^2$

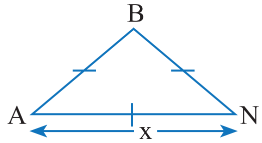
उदाहरण 6 : सँगैको त्रिभुजको क्षेत्रफल $25\sqrt{3}$ cm^2 भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान : यहाँ,

BAN एउटा समबाहु त्रिभुज हो । जसको क्षेत्रफल (A) = $25\sqrt{3}$ cm^2

समबाहु त्रिभुजको भुजा (a) = x = ?

सूत्रअनुसार,



समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

or, $25\sqrt{3}\ cm^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$

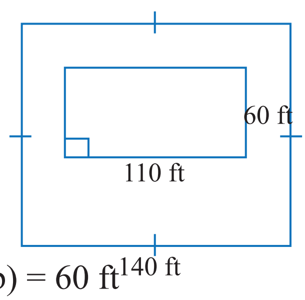
or, $\frac{25\sqrt{3} \times 4}{\sqrt{3}} cm^2 = x^2$

or, $x^2 = 100\ cm^2$

or, x = 25 cm

अतः x = 25 cm

उदाहरण 7 : एउटा 140 ft लम्बाइ भएको वर्गाकार चउरको विचमा 110 ft लम्बाइ र 60 ft चौडाइ भएको आयतकार पोखरी बनाइएको छ । गाई बाख्राले चउरको कति क्षेत्रफलको घाँस खान सक्छन् होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान : यहाँ,

वर्गाकार चउरको लम्बाइ (l) = 140 ft

वर्गाकार चउरको क्षेत्रफल (A_1) = l_2 = $(140)^2$ = 19600 ft^2

आयतकार पोखरीको लम्बाइ (l) = 110 ft , पोखरीको चौडाइ (b) = 60 ft

सूत्रअनुसार, आयतकार पोखरीको क्षेत्रफल (A_2) = $l \times b = 110 \times 60$ = 6,600 ft^2

अब पोखरीबाहेकको चउरको क्षेत्रफल (A) = $A_1 - A_2$

=19,600 ft^2 – 6,600 ft^2

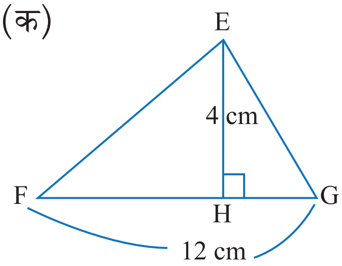
=13,000 ft^2

अतः गाई बाख्राले 13,000 ft^2 क्षेत्रफलको घाँस खान सक्छन् ।

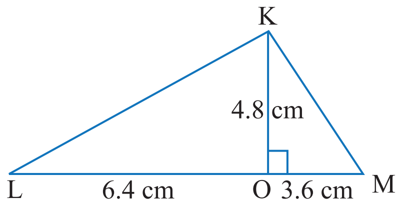
अभ्यासका लागि प्रश्न

1. दिइएका त्रिभुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :

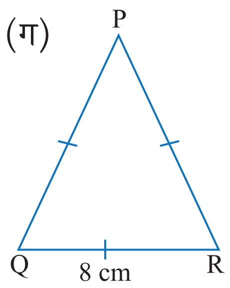
(क)



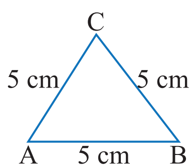
(ख)



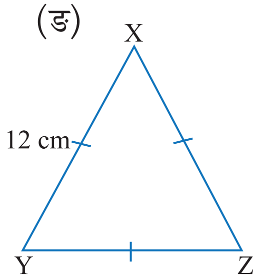
(ग)



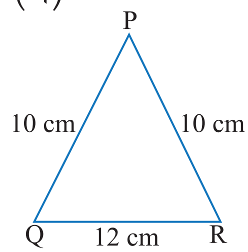
(घ)



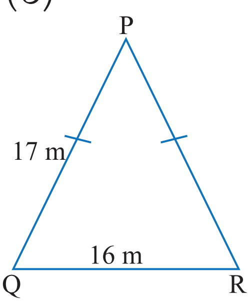
(ङ)



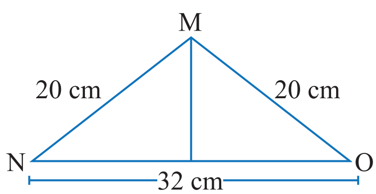
(च)



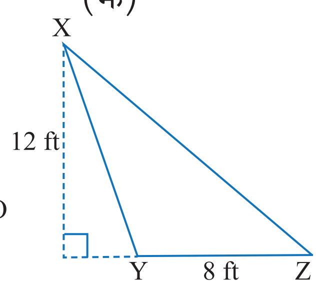
(छ)



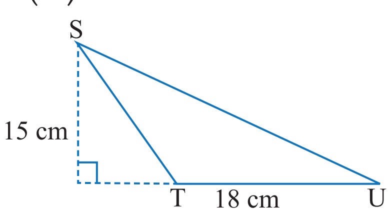
(ज)



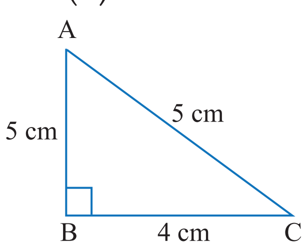
(झ)



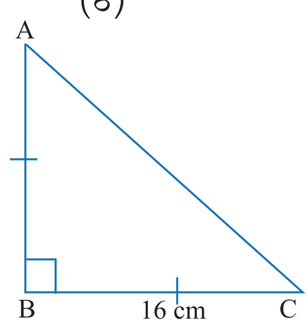
(ञ)



(ट)

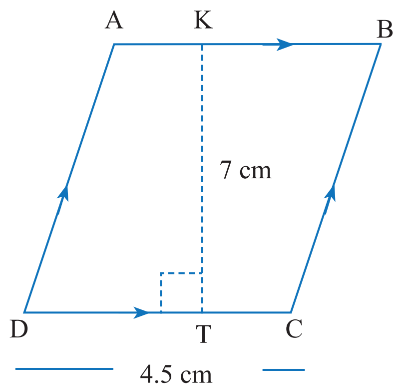


(ठ)

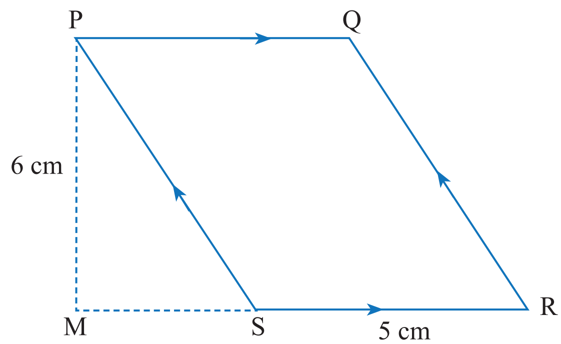


2. तल दिइएका समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :

(क)

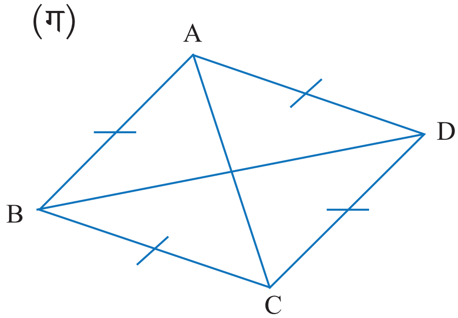


(ख)



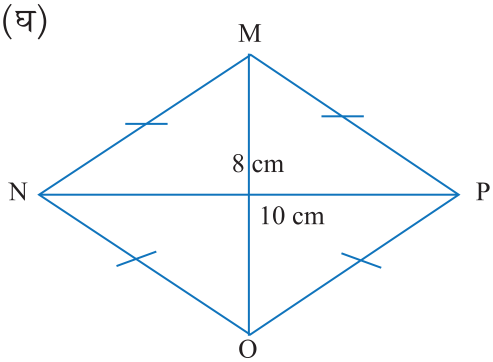
3. दिइएका ज्यामितीय चित्र समबाहु चतुर्भुजका हुन् :

(ग)



AC = 6 cm र BD = 8 cm

(घ)



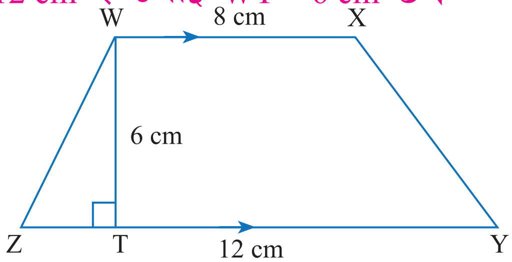
MO = 8 cm र NP = 10 cm

(अ) समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।

(आ) समबाहु चतुर्भुज ABCD मा विकर्ण (AC) = 6 cm, विकर्ण (BD) = 8 cm भए समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(इ) समबाहु चतुर्भुज MNOP मा विकर्ण (MO) = 6 cm, विकर्ण (NP) = 10 cm भए समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

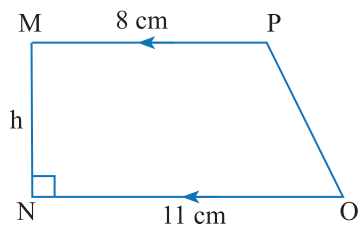
4. **दिइएको समलम्ब चतुर्भुज** WXYZ **मा** WX//ZY, WX = 8 cm, ZY = 12 cm **र उचाइ** WT = 6 cm **छ ।**



(अ) समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।

(आ) समलम्ब चतुर्भुज WXYZ को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. **दिइएको समलम्ब चतुर्भुज** MNOP **मा** PM//ON, PM = 8 cm, ON = 11 cm **र उचाइ** MN = h **छ । सो समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल** 38 cm^2 **छ ।** MN = h **को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।**

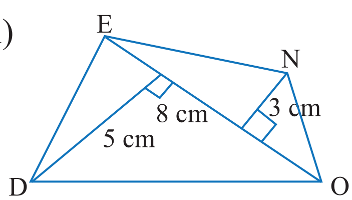


6. **दुई फरक चतुर्भुज दिइएका छन् ।**

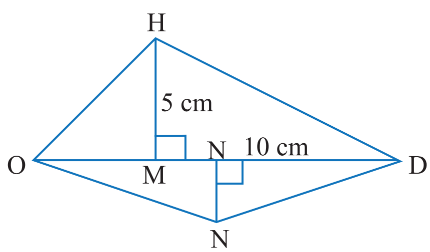
(क) चतुर्भुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।

(ख) चतुर्भुजका क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

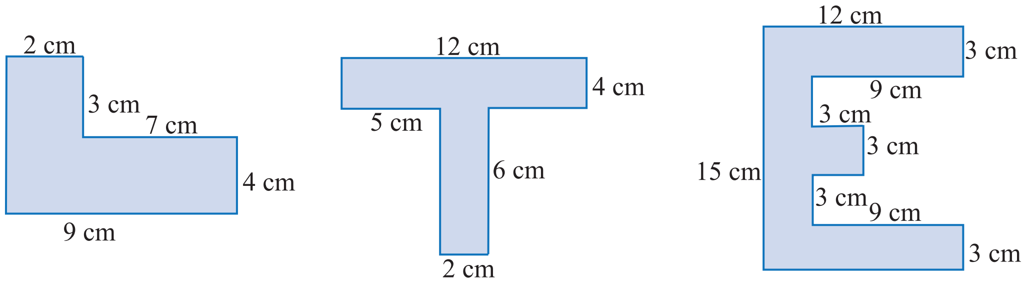
(i)



(ii)



7. तल दिइएका ज्यामितीय चित्रको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :



8. लम्बाइ र चौडाइ क्रमशः 120 मिटर र 80 मिटर भएको एउटा आयताकार जग्गाको बिचमा 30 मिटर लामो र 20 मिटर चौडाइ भएको फुटसल खेल्ने मैदान तारबार लगाई बनाइएको छ । फुटसल खेल्ने मैदानबाहेक सो जग्गाको क्षेत्रफल कति होला ?

9. एउटा 120 मिटर लम्बाइ र 100 मिटर चौडाइ भएको आयताकार मैदानको बिचमा 40 मिटर लम्बाइको वर्गाकार भलिबल कोर्ट बनाइएको छ । भलिबल कोर्ट बाहेक मैदानको क्षेत्रफल कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. (क) एउटा वर्गाकार करेसाबारीको परिमिति 200 फिट छ ।

(i) वर्गको परिमिति पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।

(ii) उक्त करेसाबारीको लम्बाइ कति होला ?

(ii) उक्त करेसाबारीको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

(ख) एउटा वर्गाकार चउरको वरिपरि लगाएको पर्खालको लम्बाइ 80 मिटर छ भने,

(i) उक्त चउरको लम्बाइ कति होला ?

(ii) उक्त चउरको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

11. (क) एउटा आयतकार कोठाको लम्बाइ 15 ft र परिमिति 54 ft छ भने,

(i) उक्त कोठाको चौडाइ कति होला ?

(ii) उक्त कोठाको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

(ख) एउटा आयतकार कोठाको लम्बाइ चौडाइको दोब्बर छ। यदि परिमिति 60 ft छ भने,

(i) उक्त कोठाको लम्बाइ र चौडाइ कति कति होला ?

(ii) उक्त कोठामा कार्पेट बिछ्याउन कति वर्ग फिट कार्पेट चाहिन्छ

उत्तर

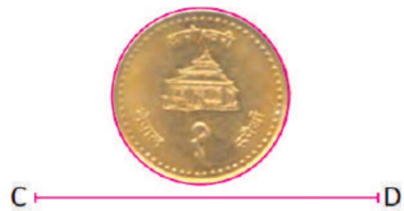
1. (क) 24 cm^2 (ख) 24 cm^2 (ग) 27.71 cm^2 (घ) 10.82 cm^2 (ङ) 62.35 cm^2 (च) 192 cm^2 (छ) 48 cm^2 (ज) 35 cm^2 (झ) 6 cm^2 (ञ) 128 cm^2
2. 24 cm^2, 80 cm^2
3. 60 cm^2
4. 4 cm
5. (क) 32 cm^2 (ख) 35 cm^2
6. (क) 42 cm^2 (ख) 60 cm^2 (ग) 108 cm^2
7. 9000 cm^2
8. 10400 cm^2
9. (क) 50 cm (ख) 2500 cm^2
10. 20 m, 400 m^2
11. (क) 12 ft (ख) 180 sq.ft

पाठ 11

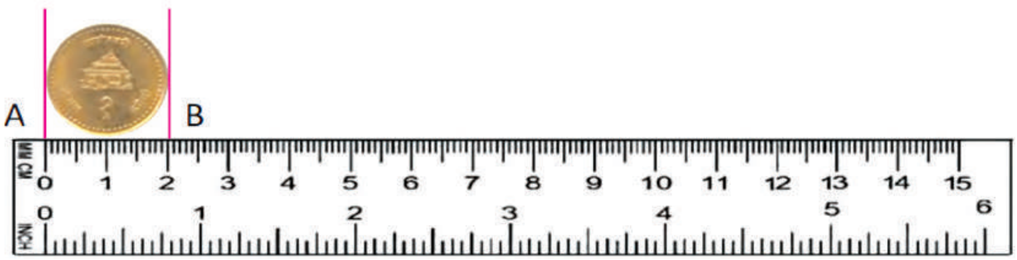
वृत्तको क्षेत्रफल
(Area of Circle)

11.1 वृत्तको परिधि र व्यासको सम्बन्ध तथा यसको प्रयोग (Relation between Circumference and Diameter of Circle and its Uses)

वृत्तको परिधि र व्यास बिचमा के सम्बन्ध हुन्छ होला ? यी दुइको सम्बन्ध थाहा पाउन एउटा एक रुपियाँको सिक्का लिनुहोस् र उक्त सिक्कालाई धागाले एक फन्को घुमाउनुहोस् र रुलरको सहायताबाट सो धागाको लम्बाइ नाप्नुहोस् । कति पाउनुभयो त ? हो पक्कै पनि धागाको लम्बाइ (l) = 6.28 cm हुनुपर्छ ।



अब चित्रमा दुई विन्दु A र B को दुरी कति छ, चित्रहेरी भन्नुहोस् त । यहाँ विन्दु A र B बिचको दुरी = 2 cm छ जसलाइ सिक्काको व्यास भनिन्छ । त्यसैले व्यास (d) = 2 cm हुन्छ ।



अब, धागाको लम्बाइ CD लाई AB ले भाग गर्दा $\frac{6.28}{2} = 3.14$ हुन्छ ।

त्यसै गरी दई रुपियाँको सिक्कालाई धागाले एक फन्को घुमाउँदा धागाको लम्बाइ र सिक्काको व्यास उही नै हुन्छ त ? पक्कै पनि हुँदैन । परिधिको लम्बाइलाई व्यासले भाग गर्दा 3.14 नै आउँछ त यसलाई परीक्षण गरी हेर्नुहोस् । हो दुवैका परिधिलाई तिनीहरूको व्यासले भाग गर्दा करिब 3.14 आउँछ ।

कुनै पनि वृत्तको वरिपरिको घेराको लम्बाइलाई परिधि (circumference) भनिन्छ ।

परिधि (c) = πd = 2πr हुन्छ । जहाँ r भनेको सिक्काको अर्धव्यास हो ।

$\because$ व्यास (d) = 2 × r = 2r हुन्छ । त्यसैले व्यास अर्धव्यासको दुई गुणा हुन्छ ।

त्यसै गरी अरु उदाहरणका लागि एउटा चुरा लिन सक्नुहुन्छ । त्यसको व्यास र परिधि पत्ता लगाई त्यसको अनुपात पत्ता लगाउनुहोस् । के सिक्काको परिधिलाई त्यसको व्यासले भाग गर्दा आउने मान र चुराको परिधिलाई त्यसको व्यासले भाग गर्दा आउने मान एउटै आयो ?

3.14 भन्नाले यो एक अचर मान हो यसलाई ग्रिक अक्षर 'π' ले जनाइन्छ । 'π' को मान $\frac{22}{7}$ पनि लेखिन्छ । अतः $\frac{c}{d} = \pi$

उदाहरण 1. एउटा वृत्तको व्यास 28 cm छ भने उक्त वृत्तको अर्धव्यास र परिधि पत्ता लगाउनुहोस । $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

समाधान : यहाँ,

वृत्तको व्यास (d) = 28 cm

वृत्तको अर्धव्यास (r) = $\frac{d}{2} = \frac{28cm}{2} = 14$ cm

फेरि, वृत्तको परिधि (c) = $2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 14 = 88$ cm

अतः वृत्तको अर्धव्यास 7 cm र परिधिको लम्बाइ = 44 cm छ ।

उदाहरण 2. एउटा वृत्ताकार सुनको औँठीको परिधि 7 cm छ । उक्त औँठीको व्यास पत्ता लगाउनुहोस् । $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

समाधान : यहाँ,

वृत्तको परिधि (c) = 7 cm

वृत्तको व्यास (d) = ?

अब सूत्रानुसार, c = πd अथवा $d = \frac{c}{\pi} = \frac{7}{\frac{22}{7}} = 7 \times \frac{7}{22} = \frac{48}{22} = 2.23$ cm

अतः औंठीको व्यास (d) = 2.23 cm

उदाहरण 3. एउटा वृत्ताकार क्रिकेट मैदानको व्यास 56 m छ । यसलाई 10 पटक वरिपरि काँडेतार लगाउन कति तार चाहिन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् । $\left(\pi = \dfrac{22}{7}\right)$

समाधान : यहाँ,

माछा पोखरीको व्यास (d) = 56 m

क्रिकेट मैदानको परिधिको लम्बाइ (c) = ?

सूत्रानुसार, $c = \pi d = 22\ 7 \times 56$ m = 176 m

काँडेतारले एक पटक घेरा लगाउन चाहिने तार = 176 m

$\therefore$ काँडेतारले 10 पटक घेरा लगाउन चाहिने तार = 176 × 10 m = 1760 m

अतः तारको लम्बाइ 1760 m हुन्छ ।

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. **तल दिइएका नापका आधारमा वृत्तको परिधि पत्ता लगाउनुहोस् :** $\left(\pi = \dfrac{22}{7}\right)$

(क) r = 7 cm (ख) r = 14 cm (ग) r = 10.5 cm

(घ) d = 70 m (ङ) d = 17.5 cm (च) d = 56 m

2. **तल दिइएका वृत्तको परिधिको लम्बाइबाट वृत्तको अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) c = 176 cm (ख) c = 308 cm (ग) c = 616 cm

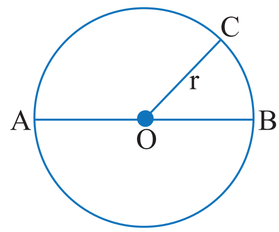
3. **14 m को लम्बाइको डोरीले बाँधेको बाख्रो डोरी तन्काएर वरिपरि हिँड्छ भने बाख्राले 5 पटक घुम्दा कति दुरी हिँड्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।**

4. **140 m व्यास भएको वृत्ताकार पोखरीमा वरिपरि कति पटक दौड्दा 17.6 km दुरी पार गर्न सक्छन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।**

11.2 वृत्तको क्षेत्रफल (Area of Circle)

क्रियाकलापः

एउटा कार्डबोर्ड लिनुहोस् र चित्रमा देखाइए जस्तै एउटा वृत्त बनाउनुहोस् । यसको अर्धव्यासलाई r ले जनाउनुहोस् ।

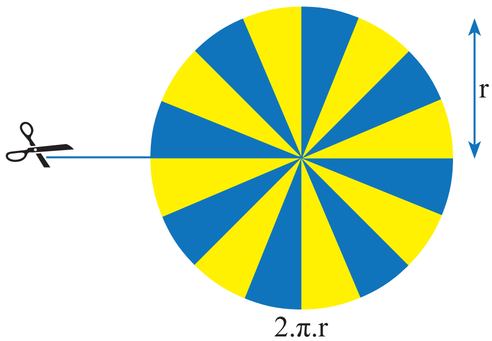


उक्त वृत्तलाई चित्र न.(क) मा देखाए जस्तै पट्याएर सकेसम्म क्षेत्रकहरू सानो हुने गरी बराबर भागमा बाँड्नुहोस् । ठुलो वृत्त भएमा 32, 64, ... भागमा पनि विभाजन गर्न सकिन्छ ।

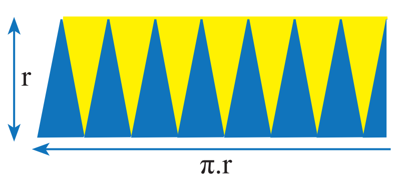
अब प्रत्येक भागलाई चित्रमा जस्तै रङ लगाउनुहोस् र प्रत्येक भागलाई कैँचीले काटेर छुट्याउनुहोस् ।

ती त्रिभुजाकार भागलाई चित्र न. (ख) मा जस्तै मिलाएर समानान्तर चतुर्भुज आकार बनाउनुहोस् ।

(छेउका एउटालाई 2 बराबर टुक्रा बनाएर आयत पनि बनाउन सकिन्छ ।)

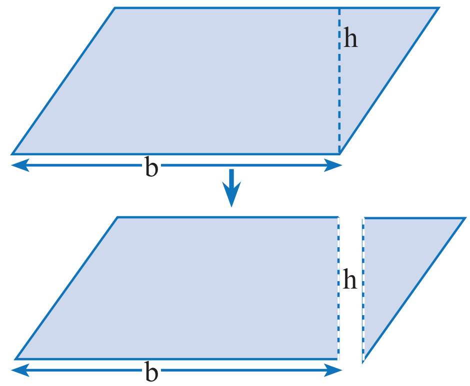


चित्र नं. (क)



चित्र नं. (ख)

त्यसरी बनेको समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफलसँग उक्त वृत्तको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ । अब वृत्तको अर्धव्यास r भएकाले परिधि $2\pi r$ हुन्छ ।



तसर्थ समानान्तर चतुर्भुजको उचाइ (h) = r हुन्छ ।

समानान्तर चतुर्भुजको आधार (b) = $\frac{2}{2}\pi r = \pi r$

∴ समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल (A) = $b \times h = \pi r \times r = \pi r2$ अतः वृत्तको क्षेत्रफल = πr^2

व्यासको आधा अर्धव्यास हुने भएकाले $r = \frac{d}{2}$ राख्दा,

वृत्तको क्षेत्रफल (A)= $\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$ हुन्छ ।

उदाहरण 1. दिइएका नापका वृत्तको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् : (π = 3.14)

(क) अर्धव्यास = 7cm (ख) व्यास = 34 ft (ग) परिधि = 62.8 inch

समाधान :

(क) यहाँ, वृत्तको अर्धव्यास (r) = 7cm

वृत्तको क्षेत्रफल (A) = ?

हामीलाई थाहा छ,

वृत्तको क्षेत्रफल (A) = $\pi r^2 = 3.14 \times 7 \times 7 = 153.86 \text{ cm}^2$

(ख) वृत्तको व्यास (d) = 34 ft

वृत्तको क्षेत्रफल (A) = ?

हामीलाई थाहा छ,

वृत्तको क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{1}{4} \times 3.14 \times 342 = 907.46$ sq.ft

(ग) यहाँ वृत्तको परिधि (C) = 62.8 inch

वृत्तको क्षेत्रफल (A) = ?

हामीलाई थाहा छ, वृत्तको परिधि (C) = $2\pi r$

or, $62.8 = 2 \times 3.14 \times r$

$\therefore \quad r = \dfrac{62.8}{2 \times 3.14} = 10$ inch

फेरि,

वृत्तको क्षेत्रफल (A) = $\pi r^2 = 3.14 \times 10 \times 10 = 314$ sq. inch

$\therefore$ वृत्तको क्षेत्रफल (A) = 314 sq. inch

अर्को तरिका

यहाँ वृत्तको परिधि (C) = 62.8 inch

वृत्तको क्षेत्रफल (A) = ?

हामीलाई थाहा छ, वृत्तको परिधि (C) = πd

or, $62.8 = 3.14 \times d$

$\therefore d = \dfrac{62.8}{3.14} = 20$ inch

वृत्तको क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{1}{4} \times 3.14 \times 20^2 = 314$ sq.inch

उदाहरण 2. एउटा वृत्तकार पोखरीको क्षेत्रफल 5544 cm^2 छ । सो वृत्तको अर्धव्यास कति होला $\left(\pi = \dfrac{22}{7}\right)$

समाधान : यहाँ,

वृत्तकार पोखरीको क्षेत्रफल (A) = 5544 cm^2

वृत्तकार पोखरीको अर्धव्यास (r) = ?

अब हामीलाई थाहा छ, वृत्तको क्षेत्रफल (A) = πr^2

or, $5544 = 22/7 \times r^2$

or, $5544 \times 7 = 22 \times r^2$

or, $\dfrac{5544 \times 7}{22} = r^2$

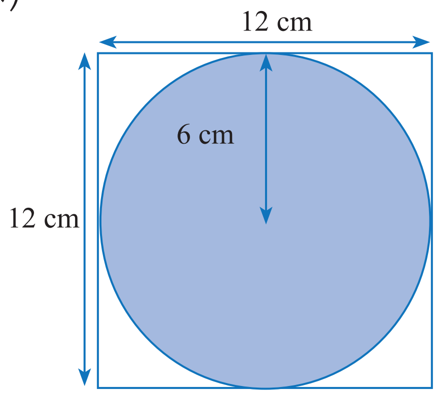
or, $r^2 = 1764$

$\therefore \quad r = 42$ cm

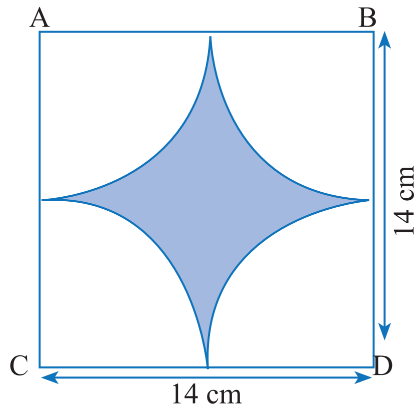
अतः वृत्तको अर्धव्यास (r) = 42 cm

उदाहरण 3. दिइएको चित्रमा छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :

(क)



(ख)



समाधान :

(क) यहाँ चित्रमा दिइएको पूरा भाग एउटा वर्ग हो । छाया नपारेको भाग वृत्त रहेको छ ।

वर्गको भुजा (a) = 12cm

सूत्रअनुसार, वर्गको क्षेत्रफल $(A_1) = a^2 = 12 \times 12 = 144 cm^2$

र वृत्तको अर्धव्यास (r) = 6 cm

वृत्तको क्षेत्रफल $(A_2) = \pi r^2 = 3.14 \times 6 \times 6 = 113.04\ cm^2$

अब, छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल $(A) = A_1 - A_2 = 144 - 113.04 = 30.96\ cm^2$

(ख) यहाँ चित्रमा दिइएको पूरा भाग ABCD एउटा वर्ग हो । छाया नपारेको भाग वृत्त रहेको छ ।

वर्गको भुजा (a) = 14cm

वर्गको क्षेत्रफल $(A_1) = a^2 = 14 \times 14 = 196\ cm^2$

फेरि, यहाँ चित्रमा छाया नपारिएका भाग 4 ओटा एक चौथाइका वृत्त हुन् ।

वृत्तको अर्धव्यास $(r) = \frac{14}{2}$ cm = 7cm

$\therefore$ एक चौथाइ वृत्तको क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = \frac{154}{4}\ cm^2$

तसर्थ 4 ओटा एक चौथाइ वृत्तको क्षेत्रफल $(A_2) = 4 \times \frac{154}{4}\ cm^2 = 154\ cm^2$

अब छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल $(A) = A_1 - A_2$

$= 196\ cm^2 - 154\ cm^2$

$= 42\ cm^2$

उदाहरण 4. यदि एउटा वृत्ताकार पौडी पोखरीको परिधि 125.6m छ भने उक्त पोखरीको पिँधको अर्धव्यास र क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् : $(\pi = 3.14)$

समाधान :

यहाँ वृत्ताकार पोखरीको पिँध वृत्त हुने भएकाले,

परिधि (C) = 125.6 m

अर्धव्यास (r) = ? क्षेत्रफल (A1) = ?

अब परिधि $(C) = 2\pi r$

or, $125.6\ m = 2 \times 3.14 \times r$

or, $\frac{125.6}{6.28}\ m = r$

$\therefore$ वृत्तको अर्धव्यास (r) = 20m

फेरि, वृत्तको क्षेत्रफल $(A) = \pi r^2 = 3.14 \times 20 \times 20 = 1256\ m^2$

अतः वृत्ताकार पोखरीको पिँधको अर्धव्यास र क्षेत्रफल 20m र 1256 m^2 हुन्छ ।

उदाहरण 5. एउटा बेलनाकार इनारको ढकनीको क्षेत्रफल 15400 cm^2 छ । $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

(क) उक्त ढकनीको अर्धव्यास कति होला ?

(ख) ढकनीको वरिपरि स्टिलको घेराबार लगाउन कति मिटर आवश्यक पर्छ ?

(ग) यदि स्टिलको प्रतिमिटर रु.250 पर्छ भने जम्मा कति खर्च लाग्ला ?

समाधान : यहाँ,

बेलनाकार इनारको ढकनी वृत्त हुने भएकाले,

क्षेत्रफल (A) = 15400 cm^2

(क) अर्धव्यास (r) = ?

हामीलाई थाहा छ, क्षेत्रफल (A) = $\pi r2$

$$\text{or, } 15400 = \frac{22}{7} \times r^2$$

$$\text{or, } \frac{15400 \times 7}{22} = r^2$$

$$\text{or, } 4900 = r^2$$

$\therefore$ r = 70 cm

अतः वृत्तको अर्धव्यास (r) = 70cm

(ख) ढकनीको वरिपरिको घेरा भनेको वृत्तको परिधि हो ।

अब परिधि (C) = $2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 70 = 440$ cm = 4.4 m

$\therefore$ ढकनीको वरिपरि स्टिलको घेराबार लगाउन 4.4 m स्टिल आवश्यक पर्छ ।

(ग) यहाँ, 1 m स्टिलको मूल्य = रु. 250

4.4 m स्टिलको मूल्य = 4.4 × रु =250

= रु.1100

अतः ढकनीको वरिपरि स्टिलको घेराबार गर्न रु.1100 लाग्छ ।

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. तलको नाप भएका वृत्तको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् : [π = 3.14]

(क) अर्धव्यास =7cm (ख) अर्धव्यास =14 ft (ग) अर्धव्यास = 21m

(घ) व्यास = 42 cm (ङ) व्यास = 2.1 inch (च) व्यास =14 m

2. निम्नलिखित परिधि भएको वृत्तको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् : $[\pi = 3.14]$

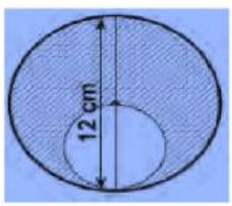
(क) 34.54 cm (ख) 65.94 m (ग) 18.84 inch

3. निम्नलिखित क्षेत्रफल भएको वृत्तको अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् : $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

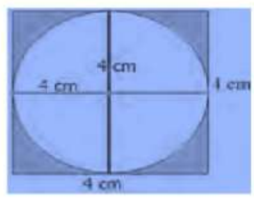
(क) 154 cm2 (ख) 346.5 ft2 (ग) 616 m2

4. तलका चित्रको छायाँ पारिएको भागको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् : $[\pi = 3.14]$

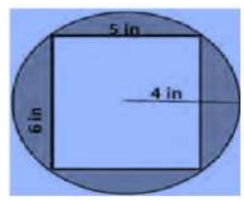
(क)



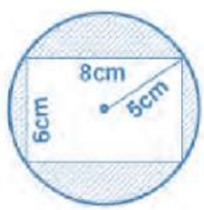
(ख)



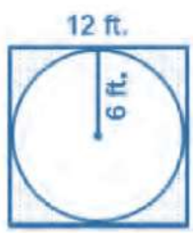
(ग)



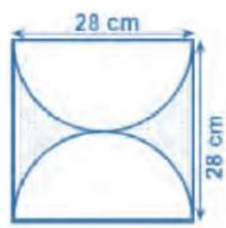
(घ)



(ङ)



(च)



5. यदि एउटा वृत्ताकार पोखरीको व्यास 14 मिटर छ भने,

(i) एउटै वृत्तमा व्यास र अर्धव्यासको सम्बन्ध के हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

(ii) पोखरीको अर्धव्यास कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(iii) उक्त पोखरीको क्षेत्रफल कति होला ? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

6. एउटा वृत्ताकार पार्कको अर्धव्यास 21 मिटर छ ।

(i) वृत्तको व्यास यसको अर्धव्यासको दुई गुणा हुन्छ, के यो भनाइ साँचो हो ?

(ii) पार्कको व्यास कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(iii) उक्त पार्कको क्षेत्रफल कति होला ? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

7. एउटा गाईलाई 7 ft लामो डोरीले किला ठोकेर घाँसे चउरमा बाँधिएको छ । उक्त गाईले बढीमा कति क्षेत्रफलको घाँस खान सक्छ ? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

8. एउटा बेलनाकार कचौराको आधारको व्यास 9 cm भए उक्त कचौराको आधारको क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् । $(\pi = 3.14)$

9. एउटा बेलनाकार पाइपको आधारको व्यास 30 cm भए उक्त पाइपको आधारको क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् । $(\pi = 3.14)$

10. शर्मिलाले 5cm अर्धव्यास भएको एउटा वृत्त खिचिन् । त्यसै गरी प्रकाशले पनि 7cm अर्धव्यास भएको अर्को वृत्त खिचे । अब कसले खिचेको वृत्तको क्षेत्रफल धेरै छ र कतिले धेरै छ ? $(\pi = 3.14)$

11. सहवीरले 14 m अर्धव्यास भएको एउटा इनार खनेका छन् । त्यसै गरी सरलाले पनि 18 m अर्धव्यास भएको अर्को इनार खनाएकी छन् । अब कसको इनारले जग्गा बढी ओगट्छ र कतिले धेरै ओगट्छ ? ($\pi = 3.14$)

12. एउटा वृत्ताकार आकारको जग्गाको क्षेत्रफल 616 m2 छ । $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

(क) उक्त जग्गाको अर्धव्यास कति होला ?

(ख) सो जग्गामा गाईवस्तु नछिरुन् भनेर वरिपरि तारबार लगाउन कति मिटर तारजाली आवश्यक पर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि प्रति मिटर रु. 200 पर्छ भने पोखरीमा एकपटक तारजाली लगाउन जम्मा कति खर्च लाग्ला ?

13. एक जना धावकले वृत्ताकार धावनमार्गमा 4 फन्को मार्दा 3520 मिटर दौड पूरा गऱ्यो भने

(क) त्यस धावनमार्गको वरिपरिको लम्बाइ कति होला ? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

(ख) त्यसका व्यास कति होला ?

(ग) त्यस धावनमार्गले कति क्षेत्रफल ओगटेको छ ?

(घ) त्यस धावन मार्गको वरिपरि तारजाली राख्न प्रति मिटर रु.650 का दरले जम्मा कति खर्च लाग्ला ?

परियोजना कार्य

१. तपाईँको वरिपरि पाइने कुनै 3 ओटा वृत्ताकार वस्तुको नाम लेख्नुहोस् । अब ती वस्तुको व्यास नाप्नुहोस् र त्यसका परिधि र क्षेत्रफल निकाली कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

२. 18 cm लामो धागाको तीन टुक्रा लिनहोस् । अब उक्त धागाबाट क्रमशः एउटा वर्ग एउटा आयत र एउटा वृत्त बनाउनुहोस् । अब तिनीहरूको क्षेत्रफल पत्ता लगाई सबभैन्दा कम र सबभैन्दा बढी क्षत्रेफल कुन आकृतिको भयो, छलफल गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) 153.93 cm^2 (ख) 615.752 sq.ft (ग) 1382.78 m^2
   (घ) 1385.4 cm^2 (ङ) 3.465 square inches (च) 153.93804 m^2
2. (क) 189.9 cm^2 (ख) 346.36 m^2 (ग) 28.27 square inches
3. (क) 7 cm (ख) 10.5 ft (ग) 14 m
4. (क) 84.78cm^2 (ख) 3.44 cm^2 (ग) 20.24 cm^2
   (घ) 30.5 cm^2 (ङ) 30.96 cm^2 (च) 168.56 cm^2
   B (i) yes (ii) 42m (iii) 1385.44 m^2
5. i. d = 2r (the radius is half the length of the diameter)
   ii. r = 2m
   iii A = 153.94m^2
6. a 198 sq.ft ,b 63.6175cm^2
7. 706.857cm^2 8. (praksah , 75.398cm^2)
9. Sarala, 401.920 m^2
10. 14m, 88m, Rs. 17,600 11. 880 m, 28m, 616 m^2, Rs. 572000

एकाइ 4 बीजगणित
(Algebra)

पाठ 12

घाताङ्क
(Indices)

तलका क्रियाकलाप अध्ययन गर्नुहोस् :

एउटै सङ्ख्यालाई लगातार गुणन गर्ने ढाँचा दिइएको छ।

लगातार गुणन क्रिया	पढ्ने तरिका
2×2	2^2 (2 को घाताङ्क 2)
$2 \times 2 \times 2$	2^3 (2 को घाताङ्क 3)
$2 \times 2 \times 2 \times 2$	2^4 (2 को घाताङ्क 4)
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	2^5 (2 को घाताङ्क 5)
$a \times a \times a \times a \times a$..........n ओटा	a^n (a को घाताङ्क n)

2^2 मा आधार 2 र घाताङ्क 2 हो। त्यस्तै गरी, a^n मा a आधार, n लाई घाताङ्क र a^n लाई a को 3ft भनिन्छ।

> कुनै सङ्ख्या वा चललाई त्यही सङ्ख्याले धेरै पटक गुणन गर्दा उक्त गुणनलाई छोटकरीमा लेख्ने सङ्केतलाई घाताङ्क भनिन्छ।

घाताङ्कका नियम (Laws of indices)

(क) एउटै आधार भएका घाताङ्कहरूको गुणन

3^2 र 3^4

$= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$= 3^6$

3^2 र 3^4 लाई विस्तारित रूपमा लेख्दा,

$= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$ हुन्छ।

यदि हामीले 3^2 र 3^4 बाट आधारमा 3 राखेर घाताङ्कलाई मात्र जोड्यौँ भने पनि 3^6 नै हुन्छ।

जस्तै : 3 2 + 6 = 3 6

त्यसैले, यदि आधार एउटै भए घाताङ्कको गुणन गर्दा आधार उही रहन्छ र घाताङ्क जोडिन्छ।

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ हुन्छ।

(ख) एउटै आधार भएका घाताङ्कको भाग

$a^5 \div a^3$

$= \dfrac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a}$

$= a^2$

यदि हामीले a^5 को घाताङ्क 5 बाट a^3 को घाताङ्कलाई घटायौँ भने पनि $a^{5-3} = a^2$ नै हुन्छ।

त्यसैले, यदि आधार एउटै भए घाताङ्कको भाग गर्दा आधार उही रहन्छ र भाजकको घाताङ्कलाई भाज्यको घाताङ्कबाट घटाइन्छ।

$a^m \div a^n = a^{m-n}$ हुन्छ।

(ग) शून्य घाताङ्क

$a^5 \div a^5$

$= \dfrac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} = 1$ ....।। समीकरण (I)

घाताङ्कको भाग बिधिबाट,

$a^5 \div a^5 = a^{5-5} = a^0$ .... समीकरण (II)

अब, समीकरण (I) र (II) बाट

$a^0 = 1$

यदि $a \neq 0$ र a को घाताङ्क शून्य छ भने त्यसको मान 1 हुन्छ। त्यसकारण $a^0 = 1$ हुन्छ।

(घ) ऋणात्मक घाताङ्कको नियम

$a^3 \div a^5$

$= \dfrac{a \times a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} = \dfrac{1}{a^2}$ .... समीकरण (I)

घाताङ्कको भाग बिधिबाट,

$a^3 \div a^5 = a^3 - 5 \ = \ a^{-2}$ .... समीकरण (II)

अब, समीकरण (I) र (II) बाट $\therefore$

$$\frac{1}{a^2} = a^{-2}$$

यदि $a \neq 0$ / a^{-m} भए, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ हुन्छ ।

(च) $(xm)n = xmn$

$(x^2)^3 = x^2 \times x^2 \times x^2 = (x \times x) \times (x \times x) \times (x \times x) = x^6 = x^2 \times 3$

$(x^3)^4 = x^3 \times x^3 \times x^3 \times x^3 = (x \times x \times x) \times (x \times x \times x) \times (x \times x \times x) \times$
$(x \times x \times x)$
$= x^{12} = x^3 \times 4$

$\therefore (x^m)^n = x^{mn}$

अर्को तरिका,

$(x^m \times x^m \times x^m \times$.........................n ओटा) $= x^{mn}$

यदि घाताङ्कको पनि घाताङ्क छ भने ती घाताङ्कलाई गुणन गरिन्छ ।

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

उदाहरण 1

(क) घाताङ्कका नियम प्रयोग गरेर सरल गर्नुहोस् :

$p^4 \times p^3 \times p^{-5}$

समाधान :

यहाँ,

$= p^4 + 3 - 5$

$= p^2$

(ख) $a^{18} \div a^{3}$

समाधान :

यहाँ,

$a^{18} \div a^{3}$

$= a^{18-3}$

$= a^{15}$

उदाहरण 2

(ग) $x^{3n-2} \div x^{2n-5}$

समाधान :

यहाँ, $\dfrac{x3n-2}{x2n-5}$

$= x3n - 2 - 2n + 5$

$= x^{n+3}$

(घ) $(a+b+c)^{m+n} \div (a+b+c)^{n+m}$

समाधान :

यहाँ,

$= \dfrac{a+b+c^{m+n}}{a+b+c^{n-m}}$

$= (a+b+c)^{m+n-n-m}$

$=(a+b+c)^{0} \quad = 1$

उदाहरण 3

सरल गर्नुहोस् :

$(x^{a-b})^{+b} \times (x^{b-c})^{b+c} \times (x^{c-a})^{c+a}$

समाधान

यहाँ,

$(x)\ a^2 - b^2 \times (x)\ b^2 - c^2 \times (x)\ c^2 - a^2$

$= (x)\ \ a^2 - b^2 + b^2 - c^2 + c^2 - a^2$

$= (x)^0$

$= 1$

उदाहरण 4

यदि $a = 1$, $b = 2$ र $c = 3$ भए ab × bc × अब को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ, $ab \times bc \times ca$

$= 12 \times 23 \times 31 \qquad = 1 \times 8 \times 3 \quad = 24$

उदाहरण 5

सरल गर्नुहोस् :

$$\frac{2^2 \times 4^2}{8^2}$$

समाधान :

यहाँ,

$$= \frac{2^2 \times (2)^{2 \times 2}}{(2)^{3 \times 2}}$$

$$= \frac{2^2 \times (2)^4}{(2)^6}$$

$$= 2^{2 + 4 - 6}$$

$$= 2^{6 - 6} = 2^0 = 1$$

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. घाताङ्कका नियम प्रयोग गरी सरल गर्नुहोस् :

(क) $x^4 \times x^3$ (ख) $(a^2b) \times (ab^3)$ (ग) $(-2x^4) \times (3x^3)$

(घ) $(ab) \times (a^3b^3) \times (a^2b)$ (ङ) $a^4b^4 \div a^3b^3$ (च) $16x^4 \div 8x^3$

(छ) $(3a^3b^2)^2$ (ज) $(3a)^0$ (झ) $\frac{5^2 \times 25^2}{125^2}$ (ञ) $\frac{4^4 \times 5^5}{16^2 \times 25^3}$

(ट) $(x + y)^7 \times (x + y)^{-3}$ (ठ) $(y^{c-d})\ c + d \times (y^{d-f})^{d+f} \times (y^{f-c})^{f+c}$

(ड) $\frac{20a^6 \times 25a^3}{100a^4}$

2. खाली कोठामा उपयुक्त सङ्ख्या भर्नुहोस् :

(क) $4^2\ \ = 8^2$ (ख) $(4x)^2\ \ = 1$

3. यदि $a = 2, b = 3, c = 1, m = 4$ र $n = 5$ भए $(a + b + c)^{m+n} \div (m + n)^{a+b+c}$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

उत्तर

1. (क) x^7 (ख) a^3b^4 (ग) $-6x^7$ (घ) a^6b^5 (ङ) ab
   (च) 2x (छ) $9a^6b^4$ (ज) 1 (झ) 1
   (ञ) 25 (ट) $(x + y)^4$ (ठ) 1 (ड) $5a^5$
2. (क) 4 (ख) 0 (ग) $\frac{(6)^9}{(9)^6}$

पाठ 13 बीजीय अभिव्यञ्जकको खण्डीकरण (Factorization of Algebraic Expressions)

अध्ययन गरौँ :

एकभन्दा बढी मान हुने अक्षर वा सङ्केतलाई चल भनिन्छ। निश्चित वा एक मात्र मान हुने सङ्केतलाई अचल भनिन्छ। जस्तै : x चल राशि हो भने 6 अचल राशि हो। चल र अचलबिच गणितीय चार क्रिया (+,-,*,÷) गरी बन्ने अभिव्यञ्जकलाई बीजीय अभिव्यञ्जक भनिन्छ। अभिव्यञ्जकमा भएको चलको सबभन्दा ठुलो घाताङ्कलाई उक्त अभिव्यञ्जकको डिग्री भनिन्छ।

जस्तैः $x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ को डिग्री 3 हुन्छ।

बीजीय अभिव्यञ्जकमा भएका पदका सङ्ख्याका आधारमा उक्त बीजीय अभिव्यञ्जकको नामकरण गरिन्छ।

- यदि बीजीय अभिव्यञ्जकमा एउटा मात्र पद भए उक्त बीजीय अभिव्यञ्जकलाई एकपदीय अभिव्यञ्जक भनिन्छ।
- दुईओटा पद भए द्विपदीय अभिव्यञ्जक भनिन्छ।
- तीनओटा पद भए त्यो त्रिपदीय अभिव्यञ्जक भनिन्छ।

अब हामी बीजीय अभिव्यञ्जकको खण्डीकरणका बारेमा अध्ययन गर्छौँ।

खण्डीकरण (Factorization)

तलका उदाहरण अध्ययन गरौँ।

$$6xy = 6.x.y$$

कुनै बीजीय अभिव्यञ्जकलाई निःशेष भाग जाने अरु बीजीय अभिव्यञ्जकलाई उक्त दिइएको बीजीय अभिव्यञ्जकका गुणनखण्ड भनिन्छ।

कुनै बीजीय अभिव्यञ्जकलाई अन्य गुणनखण्डको गुणनको रूपमा रूपान्तरण गर्ने प्रक्रियालाई खण्डीकरण भनिन्छ।

बहुपदीय अभिव्यञ्जकको स्वभावअनुसार विभिन्न तरिकाले गुणनखण्ड निकाल्न सकिन्छ।

(क) साझा गुणन खण्ड लिएर,

यदि अभिव्यञ्जकमा कुनै साझा गुणनखण्ड भएमा पहिला साझा लिनुपर्छ।

जस्तै : i) $3x + 6$

$= 3(x + 2)$ [दुवैमा x साझा छ।

ii) $2x^2 + 4x$

$= 2x(x+2)$ [दुवैमा 2x साझा छ ।

(ख) साझा लिने र पद एकत्रित गरी खण्डीकरण गर्ने

बहुपदीय अभिव्यञ्जकमा सबै पदमा साझा गुणनखण्ड नभएमा साझा गुणनखण्ड भएका पदलाई एकत्रित गरी साझा लिएर खण्डीकरण गरिन्छ।

जस्तै : $2xy+3+6x+y$

$= 2xy+6x+y+3$

$= 2x(y+3) +1(y+3)$

$= (y+3)\,(2x+1)$

उदाहरण 1 : खण्डीकरण गर्नुहोस् :

$4a^2 + 12ab$

$= 4.a.a + a.3.a.b$

$= 4a(a + 3b)$

उदाहरण 2 :

$x^2 - 15x - 5x + 3xy$

समाधान

यहाँ , $x^2 - 15y - 5x + 3xy$

साझा आउने पद मिलाउँदै,

$x^2 - 5x + 3xy - 15y$ [पहिलो दुई पदबाट ह र दोस्रो दुई पदबाट 3y साझा लिँदा]

$= x(x - 5) + 3y(x - 5)$

$= (x - 5)\ (x + 3y)$

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. तलका अभिव्यञ्जकको खण्डीकरण गर्नूहोस् :

(क) $12x + 3y$ (ख) $12a^2 + 6b^2$

(ग) $a^3 + a^2 + a$ (घ) $12b^2 + ab + bc$

2. पद एकत्रित गरी खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $ax + bx + ay + by$ (ख) $2xy + x^2y - 2y - xy$

(ग) $x^2 + 3x + xy + 3y$ (घ) $2xa^2 + 3ax + 2a^2$

उत्तर

1. (क) $3\ (4x + y)$ (ख) $6\ (2a^3 + b^2)$
   (ग) $a\ (a^2 + a + 1)$ (घ) $b\ (2b + a + c)$
2. (क) $(a + b)\ (x + y)$ (ख) $(2 + x)\ (xy - y)$
   (ग) $(x + 3)\ (x + y)$ (घ) $2a\ (ax + 3 + a)$

पूर्ण वर्ग हुने त्रिपदीय अभिव्यञ्जकको खण्डीकरण

i $(a+b)^2$ को विस्तारित रूप के हुन्छ ?

ii $(a-b)^2$ को विस्तारित रूप के हुन्छ ?

iii $(a+b)^2$ भनेका $(a+b) \times (a+b)$ हो त्यसैले,

$(a+b)(a+b)$

$= a(a+b) \times b(a+b)$

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

अत : $(a+b)^2$ को विस्तारित रूप $a^2 + 2ab + b^2$ हुन्छ ।

i $(a-b)^2$ भनेको $(a-b) \times (a-b)$ हो । त्यसैले ,

$(a-b) \times (a-b)$

$= a(a-b) - b(a-b)$

$= a^2 - ab - ab + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

अत : $(a-b)^2$ को विस्तारित रूप $a^2 - 2ab + b^2$ हुन्छ ।

- बीजीय अभिव्यञ्जक $a^2 + 2ab + b^2$ स्वरूपमा भए यसलाई $(a+b)^2$ मा लेख्न सकिन्छ । यसलाई गुणन खण्डका रूपमा $(a+b)(a+b)$ लेखिन्छ ।
- यस्तै $a^2 - 2ab + b^2$ स्वरूपको अभिव्यञ्जक भए यसलाई $(a-b)^2$ मा लेख्न सकिन्छ । यसलाई गुणन खण्डका रूपमा $(a-b)(a-b)$ लेखिन्छ ।

अब हामी पूर्ण वर्गको खण्डीकरणको अध्ययन गर्ने छौं ।

उदाहरण 1

$a^2 + \ldots\ldots +25$ लाई पूर्ण वर्ग बनाउन खाली ठाउँमा कति राख्नुपर्ला ?

समाधान :

यहाँ,

$x^2 + \ldots\ldots\ldots 25$

$= x^2 + \ldots\ldots.+(5)^2$ लाई $a^2 + 2ab + b^2$ सँग तुलना गर्दा $a = x$ र $b = 5$ छ।

तसर्थ, $2ab = 2.x.5 = 10x$

त्यसकारण, $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$ भयो।

निष्कर्ष : $x^2+ \ldots\ldots\ldots+25$ लाई पूर्ण वर्ग बनाउन खाली, ठाउँमा 10x थप्नुपर्छ।

उदाहरण 2

$x^2 - \ldots\ldots\ldots +36$

समाधान : यहाँ, $(x)^2 - 2.x.6 + (6)^2$

अब, $a^2 - 2ab + b^2$ सँग तुलना गर्दा,

$a = x , b = 6$

$2ab = 2 \times x \times 6 = 12x$

अत : $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$

निष्कर्ष : $x^2 - \ldots\ldots\ldots - 12x + 36$ लाई पूर्ण वर्ग बनाउन खाली ठाउँमा 12x थप्नुपर्छ।

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. खालि ठाउँमा उपयुक्त पद भरी पूर्ण वर्ग वनाउनुहोस् :

(क) $4x^2+$ ....$+y^2$ (ख) $1+$ ....$36y^2$

(ग) $25a^2+$ ....$+49b^2$ (घ) $9a^2-$ ....$+16b^2$

2. खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $a^2 + 12a + 36$ (ख) $p^2 + 22p + 121$

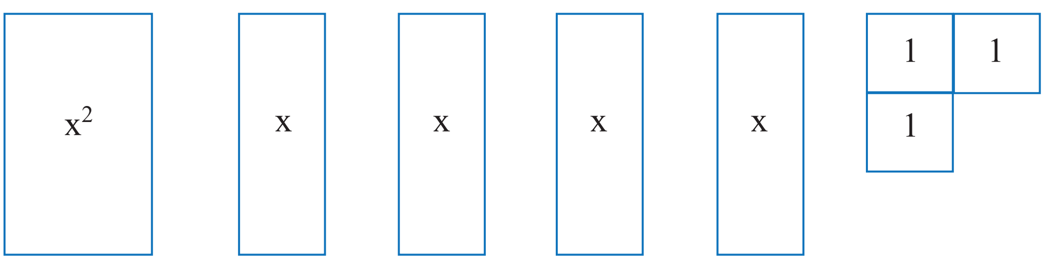
(ग) $y^2 + 14y + 49$ (घ) $y^2 - 8y + 16$

उत्तर

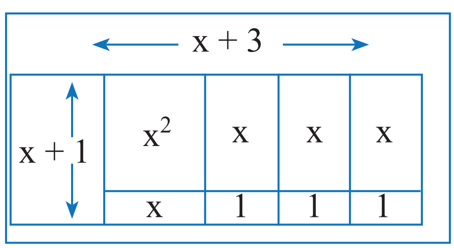
1.	(क) $4xy$	(ख) $12y$	(ग) $70ab$	(घ) $24ab$
2.	(क) $(y + 7)^2$	(ख) $(a + 11)^2$	(ग) $(y + 7)^2$	(घ) $(y - 4)^2$

$ax^2 + bx + c$ स्वरूपको खण्डीकरण

दिइएका बीजीय पत्तीहरूलाई मिलाएर आयत कसरी बनाउन सकिएला ?



यहाँ, x^2 को एउटा, x को चार ओोटा र 1 को तीनओटा टुक्रा छन् । सबै टुक्रालाई मिलाएर आयत बनाउँदा $x^2 + 4x + 3$ हुन्छ ।



यसको,

लम्बाइ $= x + 3$

चौडाइ $= x + 1$ भयो ।

त्यसैले, $x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$ भयो ।

$ax^2 + bx + c$ लाई खण्डीकरण गर्दा दिइएका तीन पदमध्ये b लाई यसरी टुक्रायाउने जसको गुणनफल $(a \times c)$ सँग बराबर होस् ।

जस्तै : $3x^2 + 8x + 4$

यहाँ, $a \times b = 3 \times 4 = 12$

$a + b = 8$ हुनुपर्छ ।

$a \times b = 12$	$a + b = 8$
1×12	$1 + 12 \neq 8$
2×6	$2 + 6 = 8$
3×4	$3 + 4 \neq 8$

तालिकाबाट,

$6 \times 2 = 12$ र $6 + 2 = 8$ भएकाले दुई सङ्ख्या 6 र 2 हुन् ।

त्यसैले,

$$
\begin{aligned}
& 3x^2 + 8x + 4 \\
&= 3x^2 + (6 + 2)x + 4 \\
&= 3x^2 + 6x + 2x + 4 \\
&= 3x(x + 2) + 2(x + 2) \\
&= (x + 2)(3x + 2)
\end{aligned}
$$

$\therefore 3x^2 + 8x + 4 = (x + 2)(3x + 2)$

उदाहरण 1 :

$a^2 - 10a - 39$

यहाँ, दुई सङ्ख्या पत्ता लगाउनुपर्ने छ । जसको गुणनफल 39 र फरक 10 हुनुपर्छ ।

त्यसैले,

39 का गुणनखण्ड

1×39	$1 - 39 \neq 10$
3×13	$3 - 13 = -10$

$$
\begin{aligned}
& a^2 - 10a - 39 \\
&= a^2 - (13 - 3)a - 39 \\
&= a^2 - 13a + 3a - 39 \\
&= a(a - 13) + 3(a - 13) \\
&= (a - 13)(a + 3)
\end{aligned}
$$

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. खण्डीकरण गर्नुहोस् :

1. $x^2 - 14x + 49$	2. $x^2 - 18x + 81$
3. $3x^2 + 4x + 1$	4. $a^2 - 10a - 39$
5. $4y^2 - 8y + 3$	6. $x^2 - x - 30$
7. $x^2 + 12x + 36$	8. $Y^2 - 8y + 16$

उत्तर

1. (क) $(x - 7)^2$
2. $(x - 9)^2$
3. $(x + 1)(3x + 1)$
4. $(a - 13)(a + 3)$
5. $(2y - 3)(2y - 1)$
6. $(x - 6)(x + 5)$
7. $(x + 6)^2$
8. $(y - 4)^2$

पाठ 14 बीजीय अभिव्यञ्जकको महत्तम समापवर्तक
(Highest Common Factor of Algebraic Expressions)

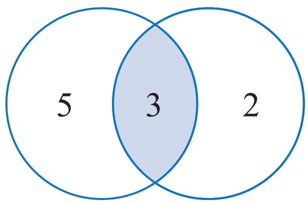
दिइएको अवस्थाको अध्ययन गरौं :

दुई सङ्ख्या 15 र 6 लिऔं ।

15 र 6 का गुणन खण्ड निकालौं ।

15 का गुणन खण्ड $= 3 \times 5$

6 का गुणनखण्ड 2×3 दुवै सङ्ख्याहरूका गुणनखण्डमध्ये ठुलो साझा गुणनखण्डलाई म. स. भनिन्छ । त्यसैले 15 र ट को म.स. 3 हुन्छ ।



छाया पारिएको भागले म.स. साझा गुणन खण्ड हो । यसले म.स लाई जनाउँछ ।

अघिल्लो कक्षामा तपाईंले अभिव्यञ्जकको खण्डीकरणका बारेमा स्पष्ट भइसक्नुभएको छ । अब, हामी तीनै अभिव्यञ्जकमा खण्डीकरण प्रयोग गरेर म.स.र ल. स. कसरी निकालिन्छ भन्ने बारेमा छलफल गर्ने छौं ।

उदाहरण 1 :

$3x^2y$ र $12xy^2$ को म. स. निकाल्नुहोस् ।

समाधान :

पहिलो पद, $3x^2y$

$= 3.x.x.y$

दोस्रो पद $= 12xy^2$

$=2.2.3.x.y.y$

साझा गुणनखण्ड $= 3 \times x \times y = 3xy$

: म. स. $= 3xy$ छ ।

उदाहरण 2 :

$x^3 - x$ र $x^2 - x - 2$ को म. स. निकाल्नुहोस् :

समाधान :

यहाँ, पहिलो अभिव्यञ्जक $= x^3 - x$

$= x(x^2 - 1)$

$= x\,(x + 1)(x - 1)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= x^2 - x - 2$

$= x^2 - (2 - 1)\,x - 2$

$= x^2 - 2x + x - 2$

$= x(x - 2) + 1(x - 2)$

$= (x - 2)\,(x + 1)$

साझा गुणनखण्ड $= (x+1)$

$\therefore$ म. स. $= (x+1)$

उदाहरण 3:

$a^2 + 2a - 15$ र $a^2 - 7a + 12$

समाधान :

यहाँ, पहिलो अभिव्यञ्जक, $a^2 + 2a - 15$

$= a^2 + (5 - 3)\,a - 15$

$= a^2 + 5a - 3a - 15$

$= a(a + 5) - 3(a + 5)$

$= (a + 5)\ (a - 3)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक, $a^2 - 7a + 12$ $[a \times b = 12]$ $[a + b = 7]$

$= a^2 - (4 + 3)\ a + 12$

$= a^2 - 4a - 3a + 12$

$= a\ (a - 4) - 3\ (a - 4)$

$= (a - 4)\ (a - 3)$

साझा गुणनखण्ड $= (a - 3)$

$\therefore$ म.स. $= a - 3$

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. **महत्तम समापवर्तक (म.स.) निकाल्नुहोस् :**

(क) $9x^2 y^3$ र $15xy^2$

(ख) $x^2 - 4$ र $3x + 6$

(ग) $3x + y$ र $15x + 5y$

(घ) $a^2 + 2ab + b^2$ र $a^2 - b^2$

(ङ) $x^2 - 9$ र $x^2 - 6x + 9$

(च) $a^2 + 10a + 16$ र $a^2 + 4a + 4$

(छ) $y^2 - 11y + 30$ र $y^2 - 36$

उत्तर

1. (क) $(x - 2)$ (ख) $(3x + y)$ (ग) $(a + b)$

(घ) $(x - 3)$ (ङ) $(a + 2)$ (च) $(y - 6)$

पाठ 15

लघुत्तम समापवर्त्य
(lowest common multiple)

अध्ययन गरौँ :

दुईओटा सङ्ख्या 4 र 5 लिऔँ ।

4 का अपवर्त्य (m_4) = {4,8,12,16,20,24,28,.......}

5 का अपवर्त्य (m_5) = {5,10,15,20,25,30,.........}

4 र 5 को सबैभन्दा सानो साझा अपवर्त्य 20 हो ।

त्यसैले 4 र 5 को ल.स. 20 हुन्छ ।

क्रियाकलाप

अब, बीजीय अभिव्यञ्जकको लघुत्तम समापवर्त्य कसरी निकाल्न सकिन्छ भन्ने बारेमा हेरौँ :

$6y^2 = 2.3.y.y$

$10y^3 = 2.5.y.y.y$

साझा गुणनखण्ड $2.y.y = 2y^2$

बाँकी गुणनखण्ड $= 3 \times 5 \times y = 15y$

नूल.स. = साझा गुणनखण्ड × बाँकी गुणनखण्ड

$= 2y^2 \times 15y$

$= 30y^3$

दिइएका अभिव्यञ्जकको साझा गुणनखण्ड र बाँकी गुणनखण्डको गुणनफल उक्त अभिव्यञ्जकको लघुत्तम समापवर्त्य हो ।

दुई वा दुईभन्दा बढी बीजीय अभिव्यञ्जकको लघुत्तम समापवर्त्य भनेको ती अभिव्यञ्जकले नि:शेष भाग जाने सबै भन्दा सानो बीजीय अभिव्यञ्जक हो । यसलाई छोटकरीमा ल.स. (l.c.m) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

ल.स. निकाल्नुहोस्ः

$x^2 + 4x + 4$ र $x^2 + 2x$

समाधान :

यहाँ , पहिलो अभिव्यञ्जक, $x^2 + 4x + 4$

$= x^2 + (2 + 2)\ x + 4$

$= x^2 + 2x + 2x + 4$

$= x(x + 2) + 2\ (x + 2)$

$= (x + 2)\ (x + 2)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक, $x^2 + 2x$

$= x\ (x + 2)$

साझा गुणनखण्ड $= (x + 2)$

बाँकी गुणनखण्ड $= x\ (x + 2)$

ल.स. = साझा गुणनखण्ड × बाँकी गुणनखण्ड

$= (x + 2).x\ (x + 2)$

$= x\ (x + 2)^2$

उदाहरण 2

ल.स. निकाल्नुहोस् : $x^3 - 4x$ र $x^2 + 7x + 10$

समाधान :

यहाँ, पहिलो अभिव्यञ्जक, $x^3 - 4x$

$= x(x^2 - 4)$

$= x\{(x)^2 - (2)^2\}$

$= x(x + 2)\ (x - 2)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक, $x^2 + 7x + 10$

$= x^2 + (5 + 2)\, x + 10$

$= x^2 + 5x + 2x + 10$

$= x(x + 5) + 2\,(x + 5)$

$= (x + 5)\,(x + 2)$

साझा गुणनखण्ड $= (x+2)$

बाँकी गुणनखण्ड $= x(x - 2)\,(x + 5)$

ल.स. = साझा × बाँकी गुणनखण्ड

$= (x + 2)\ x\ (x + 2)\,(x + 5)$

$= x(x + 2)\,(x - 2)\,(x + 5)$

उदाहरण 3

लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) पत्ता लगाउनुहोस्ः

(क) $3x^2 - 3$ र $x^2 - 1$

समाधान :

पहिलो अभिव्यञ्जक, $3x^2 - 3$

$= 3(x^2 - 1)$

$= 3(x + 1)\,(x - 1)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक, $x^2 - 1$

$= (x + 1)\,(x - 1)$

साझा गुणनखण्ड $= (x + 1)\,(x - 1)$

बाँकी गुणनखण्ड = 3

ल.स. = साझा गुणनखण्ड × बाँकी गुणनखण्ड

$= 3(x + 1)\,(x + 1)$

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $6x^2 + y$ र $9xy^2$

(ख) $x + y$ र $x^2 + xy$

(ग) $3x^2 + 7x + 2$ र $2x^2 + 3x - 2$

(घ) $x^2 - 3x + 2$ र $x^2 + x - 6$

(ङ) $x^2 - 2x$ र $x - 2$

(च) $x^2 - 4$ र $x^2 + 3x + 2$

(छ) $x^2 - 5x - 14$ र $x^2 - x - 7$

उत्तर

1. (क) $18x^2y^2$ (ख) $x(x+y)$ (ग) $(x + 2)(2x - 1)(3x + 1)$
(घ) $(x - 2)(x + 3)(x - 1)$ (ङ) $x(x - 2)$ (च) $(x + 2)(x - 2)(x + 1)$
(छ) $(x + 1)(x - 7)(x + 2)$

पाठ 16

बीजीय भिन्न
(Algebraic Fraction)

अध्ययन गरौँ :

तल दिइएका सङ्ख्यालाई अवलोकन गर्नुहोस् र कस्ता कस्ता सङ्ख्या हुन् ? छुट्याउनुहोस् ।

$5, \frac{4}{5}, \frac{4x}{3y}, \frac{a}{b}$

पहिलो र दोस्रो सङ्ख्या अर्थात् 5 र 4 आनुपातिक सङ्ख्या हुन् । त्यस्तै गरी $\frac{4x}{3y}$ पनि आनुपातिक सङ्ख्या हो ,जसमा हर र अंश दुवैमा बीजीय अभिव्यञ्जक छ । त्यसैले $\frac{4x}{3y}$ लाई बीजीय भिन्न भनिन्छ ।

यदि बीजीय भिन्नको हरमा शून्य (0) छ भने अर्थात् $\frac{a}{b}$ मा $b = 0$ भए उक्त अभिव्यञ्जक अपरिभाषित हुन्छ ।

16.1 बीजीय भिन्नको सरलीकरण (Simplification of Algebraic Fraction)

बीजीय भिन्नको सरल गर्दा ध्यान दिनुपर्ने कुरा

- हर र अंश दुवैलाई छुट्टाछुट्टै खण्डीकरण गर्ने
- हर र अंशका साझा अभिव्यञ्जक हटाउने र सरल गर्ने

उदाहरण 1: सरल गर्नुहोस् :

$\frac{2}{4x} + \frac{3}{4x}$

$= \frac{2+3}{3x}$

$= \frac{5}{4x}$ [समान हर भएकाले हर एउटा मात्र राखेर अंशमा जोड क्रिया गरियो ।]

यदि हर समान भएमा अंशको आवश्यक क्रिया मात्र गरेर एउटा हर लेख्नुपर्छ ।

उदाहरण 2: सरल गर्नुहोस् :

$$\frac{5a^2b}{10ab^2}$$

$$= \frac{5 \times a \times a \times b}{5 \times 2 \times a \times b \times b}$$

$$= \frac{5a}{2b}$$

उदाहरण 3: $\frac{x^2 + x - 12}{x^2 - x - 6}$

समाधान : अंशलाई खण्डीकरण गर्दा,

$$x^2 + x - 12$$

$$= x^2 + (4 - 3)\ x - 12$$

$$= x^2 + 4x - 3x - 12$$

$$= x(x + 4) - 3\ (x + 4)$$

$$= (x + 4)\ (x - 3)$$

हरलाई खण्डीकरण गर्दा,

$$x^2 - x - 6$$

$$= x^2 - (3 - 2)\ x - 6$$

$$= x^2 - 3x + 2x - 6$$

$$= x(x - 3) + 2\ (x - 3)$$

$$= (x - 3)\ (x + 2)$$

अब,

$$\frac{x^2 + - 12}{x^2 - x - 6}$$

अंश र हर दुवैलाई छुट्टा छुट्टै खण्डीकरण गरेर साझा अभिव्यञ्जक हटाएको

$$= \frac{(x+4)\,(x-3)}{(x-3)\,(x+2)}$$

$$= \frac{(x+4)}{(x+2)}$$

उदाहरण 4: x को मान हुँदा $\frac{x^3}{x^2-4}$ अपरिभाषित हुन्छ ?

समाधान : यदि $\frac{a}{b}$ मा $b = 0$ भए दिइएको अभिव्यञ्जक अपरिभाषित हुन्छ । त्यसैले,

$x^2 - 4 = 0$

or, $x^2 = 4$

: $x = 2$

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. x को मान कति हुँदा तलका अभिव्यञ्जक परिभाषित हुँदैनन् ?

(क) $\frac{3}{x-12}$ (ख) $\frac{x^2-y}{x+y}$

(ग) $\frac{x^2}{x^2+49}$ (घ) $\frac{x}{4-x}$

2. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{15x^2y}{20xy^2}$ (ख) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$

(ग) $\frac{(x-3)^2}{2x-6}$ (घ) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$

(ङ) $\frac{x^2+2x-15}{x^2+9x+20}$

उत्तर

1. (क) $x = 12$ (ख) $x = y$ (ग) $x = \pm 7$ (घ) $X = 4$

2. (क) $\frac{3x}{4y}$ (ख) $\frac{a-b}{a+b}$ (ग) $\frac{x-3}{2}$ (घ) $\frac{x+3}{x-3}$ (ङ) $\frac{x-3}{x+4}$

16.2 समान हर भएका बीजीय भिन्नको सरलीकरण (simplification of algebraic fractions)

यदि बीजीय भिन्नको हर उही छ भने अंशको मात्र जोड वा घटाउ गरिन्छ ।

उदाहरण 1: $\frac{3x}{x-3} - \frac{9}{x-3}$

समाधान : $\frac{3x}{x-3} - \frac{9}{x-3}$

$= \frac{3x-9}{x-3}$ [हरलाई जस्ताको तस्तै राखेर सरल गरेको ।]

$= \frac{3(x-3)}{(x-3)}$ [साझा लिएर न्यूनतम पदमा लेखेको]

$= 3$

उदाहरण 2: $\frac{4x^2}{x+5y} - \frac{12xy-9y^2}{x+5y}$

$\frac{4x^2}{x+5y} - \frac{12xy-9y^2}{x+5y}$

समाधानः यहाँ,

$\frac{4x^2}{x+5y} - \frac{12xy-9y^2}{x+5y}$

$= \frac{4x^2-12xy+9y^2}{x+5y}$

$= \frac{4x^2-12xy+9y^2}{x+5y}$

अंशमा भएको अभिव्यञ्जकलाई खण्डीकरण गर्दा,

$4x^2 - 12xy + 9y^2$

$= 4x^2 - (6+6)xy + 9y^2$

$= 4x^2 - 6xy - 6xy + 9y^2$

$= 2x(2x-3y) - 3y(2x-3y)$

$= (2x-3y)(2x-3y)$

$9 \times 4 = 36$

36 को गुणनखण्ड

1×36

2×18

3×12

4×9

6×6 जोड्दा 12 हुनुपर्ने छ । त्यसैले 6×6 चाहिएको गुणनखण्ड हो ।

अब, खण्डीकरणबाट आएको गुणनखण्ड राख्दा,

$$= \frac{(2x - 3y)\,(2x - 3y}{x + 5y}$$

$$= \frac{(2x - 3y)}{x + 5y}$$

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{4a}{4} + \frac{a}{7}$

(ख) $\frac{11}{3x} + \frac{2}{3x}$

(ग) $\frac{3}{x+2} - \frac{2}{2+x}$

(घ) $\frac{3x}{x+1} + \frac{3}{x+1}$

2. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{3x+1}{x^2+2} - \frac{x+1}{x^2+2}$

(ख) $\frac{y-15}{y^2-9} + \frac{18}{y^2-9}$

(ग) $\frac{x^2-4x}{x^2-4} + \frac{4}{x^2-4}$

(घ) $\frac{y^2+3y}{y+3} + \frac{5y+15}{y+3}$

(ङ) $\frac{a^2}{4-a} - \frac{7a-12}{4-a}$

उत्तर

1. (क) $\frac{5a}{7}$ (ख) $\frac{13}{3x}$ (ग) $\frac{1}{x+2}$ (घ) 3

2. (क) $\frac{2x}{x^2+2}$ (ख) $\frac{1}{y=3}$ (ग) $\frac{x-2}{x+2}$

(घ) $(y + 5)$ (ङ) $-(a + 3)$

16.3 असमान हर भएका बीजीय भिन्नको सरलीकरण Simplifying algebraic fractions with unequal denominators

असमान हर भएमा पहिला तिनीको हर समान बनाउनुपर्छ ।

तरिका

- फरक फरक हरको खण्डीकरण गर्ने र ल.स. निकाल्ने
- प्रत्येक अभिव्यञ्जकको हरले उक्त ल.स. लाई भाग गर्ने र भागफलले अंशलाई गुणन गर्ने
- अन्त्यमा भिन्नलाई न्यूनतम पदमा लेख्ने

उदाहरण 1. सरल गर्नुहोस् :

$$\frac{x+3}{x-2} - \frac{x+2}{x-3}$$

समाधान : $(x-2)$ र $(x-3)$ को ल.स. $(x-2)(x-3)$ हुन्छ ।

$$= \frac{(x+3)(x-3) - (x+2)(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2 + 9 - x^2 - 4}{(x^2-4)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2 - 9 - x^2 + 4}{(x-4)(x-3)}$$

$$= \frac{-5}{(x-2)(x-3)}$$

$(x+3)(x-3)$
$= x^2 - 9$
$= (a+b)(a-b)$
$= a^2 - b^2$

उदाहरण 2 : सरल गर्नुहोस् :

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{3}$$

$$= \frac{10}{15} + \frac{12}{15}$$

$$= \frac{10 + 12}{15}$$

$$= \frac{22}{15}$$

उदाहरण 3 : सरल गर्नुहोस् :

$$\frac{2}{(x + 2y)} + \frac{1}{x - 2y}$$

समाधान : (x + 2y) र (x-2y) को ल. स. निकाल्दा, (x + 2y) र (x – 2y) दुवै हुन्छ ।

$$= \frac{2(x - 2y) \ + 1(x + 2y)}{(x + 2y)\ (x - 2y)}$$

$$= \frac{2x - 4y + x + 2y}{(x + 2y)\ (x - 2y)}$$

$$= \frac{3x - 2y}{(x + 2y)\ (x - 2y)}$$

(भिन्नको हरमा ला।सा। राखी भिन्नको हरले ल.स. लाई भाग गरेर सोही भिन्नको अंशलाई गुणन गरेको ।)

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{x^2}{6} + \frac{2x^2}{8}$

(ख) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3}$

(ग) $\frac{3}{7} - \frac{5}{3y}$

(घ) $\frac{7x}{11} - \frac{2}{5}$

2. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$

(ख) $\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}$

(ग) $\frac{2}{x-2} + \frac{4}{x+2}$

(घ) $\frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{x-1}$

(घ) $\frac{x+3}{x-5} - \frac{x+5}{x-3}$

उत्तर

1. (क) $\frac{5x^2}{12}$ (ख) $\frac{3x^2+4y^2}{12}$ (ग) $\frac{9y-35}{21}$ (घ) $\frac{35x-22}{55}$

2. (क) $\frac{4}{x^2-4}$ (ख) $\frac{2b}{a^2=b^2}$ (ग) $\frac{6x-4}{x^2-4}$ (घ) $\frac{2x+1}{x^2-1}$

16.4 बीजीय भिन्नको गुणन र भाग (Multiplication and Division of Algebraic Fractions)

बीजीय भिन्नको गुणन गर्ने तरिका

- अंश र हरको छुट्टाछुट्टै खण्डीकरण गर्ने
- अंशलाई अंशसँगै र हरलाई हरसँगै गुणन गर्ने
- अंश र हरका साझा अभिव्यञ्जक हटाउने
- उत्तर लघुत्तम रूपमा लेख्ने

उदाहरण 1.

$$\frac{2x}{2x+y} \times \frac{2xy+y^2}{8y^2}$$

$$= \frac{2x}{2x+y} \times \frac{y(2x+y)}{8y^2}$$

$$= \frac{2x\,(2x+y)}{(2x+y)\,8y}$$

$$= \frac{x}{4y}$$

उदाहरण 2. सरल गर्नुहोस् :

$$= \frac{x^2-25}{x^2-16} \div \frac{x-5}{x-4}$$

$$= \frac{(x)^2-(5)^2}{(x)^2-(4)^2} \div \frac{x+5}{x-4}$$

$$= \frac{(x+5)\,(x-5)}{(x+4)\,(x-5)} \div \frac{x+4}{x+5}$$

$$= \frac{x-5}{x-4}$$

÷ चिह्नलाई × मा बदल्ने र ÷ पछाडिको भिन्नको हरलाई अंशमा र अंशलाई हरमा लेख्ने

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{y^2}{x} \times \frac{x^3}{y}$

(ख) $\frac{a-3}{3} \times \frac{6}{a-3}$

(ग) $\frac{x^2-y^2}{x+y} \times \frac{y}{(x-y)^2}$

(घ) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} \times \frac{x-y}{x+y}$

2. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{x^2-y^2}{x+y} \div \frac{x-y}{x+y}$

(ख) $\frac{x2-5x+6}{x^2-9} \div \frac{x-3}{x+3}$

(ग) $\frac{x^2}{y^2} \div \frac{x}{y}$

(घ) $\frac{a^2-b^2}{a} \div \frac{a-b}{b}$

उत्तर

1. (क) $\frac{y}{x}$ (ख) 2 (ग) $\frac{y}{x-y}$ (घ) 1

2. (क) $x+y$ (ख) $\frac{x-2}{x-3}$ (ग) $\frac{x}{y}$ (घ) $\frac{b}{a}$

पाठ 17 दुई चलयुक्त युगपतरेखीय समीकरण (Simultaneous equations with two variables)

अध्ययन गरौँ :

रमिला र रमेशलाई 6 ओटा अम्बा आपसमा बाँड्नु छ। उनीहरूले कति कति पाउलान् ? हेरौँः

यहाँ, रमिलाले पाउने अम्बाको सङ्ख्या = x मानौँ

रमेशले पाउने अम्बाको सङ्ख्या = y मानौँ

रमिला र रमेशले पाउने जम्मा अम्बा 6 ओटा छन् ।

अब, तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

रमिला (x)	6	5	4	3	2
रमेश (y)	0	1	2	3	4

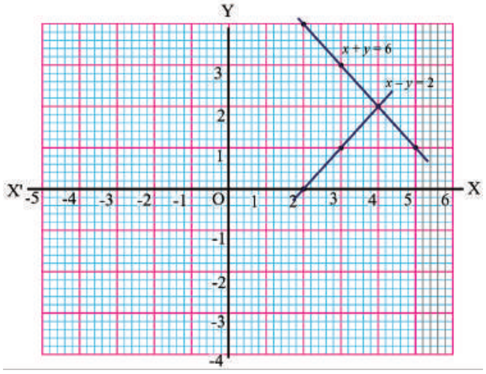
$X + y = 6$..(i)

त्यस्तै, रमेशसँग रमिलाको भन्दा 2 ओटा बढी अम्बा भए दुवैले कति कति अम्बा प्राप्त गरे होलान् ?

रमिला (x)	2	3	4	5	6
रमेश (y)	0	1	2	3	4

$x - y = 2$..(ii)

अब, माथिका दुई समीकरणलाई ग्राफ पेपरमा भरेर हेर्दा,

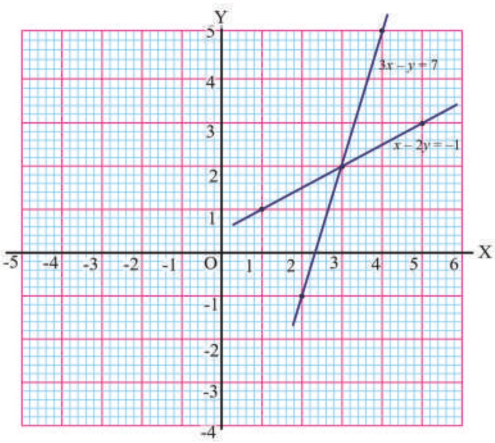


कुनै दुईओटा रेखीय समीकरण ग्राफमा प्रस्तुत गर्दा समीकरणलाई प्रतिनिधित्व गर्ने रेखा एउटा विन्दुमा मात्र प्रतिच्छेदित हुन्छन् भने उक्त समीकरणलाई युगपतरेखीय समीकरण भनिन्छ । काटिएको विन्दुको मान नै उक्त दुईओटा रेखीय समीकरणहरूको हल हुन्छ। रेखीय समीकरण ग्राफमा प्रस्तुत गरी समाधान गर्ने विधिलाई लेखाचित्र विधि भनिन्छ।

उदाहरण 1. लेखाचित्र बिधिबाट हल गर्नुहोस् :

$3x - y = 7$

$x - 2y = -1$



समाधान यहाँ, $3x - y = 7$ ……… (i)

$x - 2y = -1$ ………… (ii)

समीकरण (i) बाट $3x - y = 7$

or, $y = 3x - 7$ मा $x = 2, 3$ र 4 राख्दा,

X	2	3	4
Y	–1	2	5

तसर्थ यसका विन्दु (2,-1), (3,2) र (4,5) भए।

त्यस्तै समीकरण (ii) बाट $x - 2y = -1$

or, $x = 2y - 1$ मा $y = 1, 2,$ र 3 राख्दा,

X	1	3	5
Y	1	2	3

तसर्थ, यसका विन्दु (1,1), (3,2) र (5,3) भए । अब विन्दुलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर्दा ग्राफमा $3x - y = 7$ र $x - 2y = -1$ समीकरण विन्दु (3, 2) मा प्रतिच्छेदित भएका छन् । तसर्थ $x = 3$ र $y = 2$ } समीकरण (i) र (ii) को हल हो ।

शाब्दिक समस्यामा थाहा नभएका दुई सङ्ख्या ग्राफ विधिबाट पत्ता लगाउँदा ध्यान दिनुपर्ने कुरा :

(क) दिएको समस्यालाई राम्रोसँग पढेर चलराशि राखेर समीकरण निर्माण गर्ने

(ख) प्रत्येक समीकरणमा कुनै एउटा चलराशिको मान मानेर अर्को चलराशिको मान निकाली तालिकामा प्रस्तुत गर्ने

(ग) तालिकाका आधारमा ग्राफमा भरी सोहीअनुसार दुईओटा सरल रेखा खिच्ने

(घ) दुई सरल रेखा एकआपसमा काटिएको विन्दुको निर्देशाङ्क नै आवश्यक सङ्ख्या हो ।

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. तलका जोडी समीकरणलाई लेखाचित्र विधिबाट हल गर्नुहोस् र जाँचेर हेर्नुहोस् :

(क) $x + y = 5, \quad x - y = 3$

(ख) $3x + y = 7, \quad x = 2y$

(ग) $x + y = 13, \quad 2x = y + 8$

(घ) $x + y = 6, x - y = 2$

(ङ) $x + y = 8, \quad x - y = 4$

(च) $4x + y = 2, \quad 3x - 2y = 7$

(छ) $x + 2y = 6, \quad 2y - x = 2$

(ज) $3x + 2y = 4, \quad x - 3y = 5$

(झ) $2x = 5 + 3y, \quad 5y = 2x - 3$

(ञ) $2x - 1 = y, \quad 3x - 2y = 0$

(ट) $x + 3 = 2y, \quad 2x + y = 14$

(ठ) $x - 2y = 5, \quad 2x + 3y = 10$

उत्तर सहजकर्तालाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 18 वर्ग समीकरण हल
(Solving Quadratic Equations)

तलका समीकरण अध्ययन गर्नुहोस् :

(क) $x - 8 = 0$ (ख) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (ग) $x^2 - 36 = 0$

(अ) माथिका समीकरणमा कतिओटा चल राशि छन् ?

(आ) माथिका समीकरणमा x को डिग्री कति छ ?

(इ) चलराशिको मान कति कति हुन्छ ?

(ई) माथिका समीकरणमा के फरक छ ?

यहाँ, पहिलो समीकरणमा चलराशि ह को सबैभन्दा ठुलो घाताङ्क 1 छ भने बाँकी सबै समीकरणमा चलराशि x को सबैभन्दा ठुलो घाताङ्क 2 छ । पहिलो समीकरण एक चलयुक्त रेखीय समीकरण हो भने अरू दुई समीकरण वर्ग समीकरण हुन् ।

(क) $x - 8 = 0$

or, $x = 8$

(ख) $x^2 - 5x + 6 = 0$

or, $x^2 - (3 + 2)x - 6 = 0$

or, $x^2 - 3x - 2x - 6 = 0$

or, $x(x - 3) - 2(x - 3) = 0$

or, $(x - 3)(x - 2) = 0$

दुई गुणनखण्डको गुणनफल 0 हुन्छ भने यी दुईमध्ये एउटा शून्य हुनैपर्छ ।

either $(x - 3) = 0$ or $(x - 2) = 0$ हुन्छ ।

यदि $x - 3 = 0$ भए $x = 3$

यदि $x - 2 = 0$ भए $x = 2$ हुन्छ ।

अतः $x = 3, 2$ हुन्छ ।

(ग) $x^2 - 36 = 0$

or, $(x)^2 - (6)^2 = 0$

or, $(x + 6)(x - 6) = 0$

दुई गुणनखण्डको गुणनफल 0 हुन्छ भने यी दुईमध्ये एउटा शून्य हुनैपर्छ ।

either, $(x + 6) = 0 \quad x = -6$

यच, $(x - 6) = 0 \quad x = 6$ अतः $x = 6, -6$ हुन्छ ।

डिग्री 2 भएको एक चलयुक्त समीकरणलाई वर्ग समीकरण भनिन्छ । यो $ax^2 + bx + c = 0$ स्वरूपको हुन्छ । जहाँ $a \neq 0$ हुन्छ, जस्तै : $x^2 + 5x + 6 = 0$ वर्ग समीकरणमा चल राशिका दुईओटा मान हुन्छन् ।

उदाहरण 1

हल गर्नुहोस् :

(क) $x2 - 8x + 12 = 0$ (ख) $4x^2 - 100 = 0$

समाधान

(क) यहाँ, $x^2 - 8x + 12 = 0$

or, $x^2 - (6 + 2)x + 12 = 0$

or, $x^2 - 6x - 2x + 12 = 0$

or, $x(x - 6) - 2(x - 6) = 0$

or, $(x - 6)(x - 2) = 0$

either, $(x - 6) = 0 \quad \therefore \quad x = 6$

or, $(x - 2) = 0 \quad \therefore \quad x = 2$ तसर्थ x को मान 6 र 2 हुन्छ ।

(ख) $4x^2 - 100 = 0$

or, $(2x)^2 - (10)^2 = 0$

or, $(2x + 10)(2x - 10) = 0$

either, $(2x + 10) = 0 \therefore = \dfrac{-10}{2} = -5$

or, $(2x - 10) = 0 \therefore = \frac{-10}{2} = -5$

तसर्थ, x को मान + 5 हुन्छ ।

उदाहरण 2

x को मान 2 र 1 हुने वर्ग समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ, x को मान 2 छ । त्यसैले $x = 2$ हुन्छ ।

or, $x - 2 = 0$

फेरि x को मान 1 छ । त्यसैले, $x = 1$ or, $x - 1 = 0$ हुन्छ ।

अब, $(x - 2)(x - 1) = 0$

or, $x(x - 1) - 2(x - 1) = 0$

or, $x^2 - x - 2x + 2 = 0$

or, $x^2 - 3x + 2 = 0$ नै आवश्यक वर्ग समीकरण हो ।

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. हल गर्नुहोस् :

(क) $x^2 - 5x = 0$ (ख) $2y^2 - 8y = 0$ (ग) $6y^2 + 3y = 0$

(घ) $9z^2 - 16 = 0$ (ङ) $5x + 25x^2 = 0$ (च) $4y^2 - 49 = 0$

2. हल गर्नुहोस् :

(क) $x^2 + 10x + 25 = 0$ (ख) $y^2 - 8y + 15 = 0$ (ग) $a^2 + 9a - 22 = 0$

(घ) $x^2 + 4x + 4 = 0$ (ङ) $x^2 - 10x - 24 = 0$ (च) $x^2 - 9x + 18 = 0$

(छ) $7x^2 + 13x - 2 = 0$ (ज) $y^2 - 18y + 77 = 0$ (झ) $2x^2 + 11x + 12 = 0$

3. **x को मान 7 र 3 हुने वर्ग समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :**

4. **y को मान –2 र –1 हुने वर्ग समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :**

उत्तर

1. (क) $x = 0$ or 5 (ख) $y = 0$ or 4 (ग) $y = 0$ or $\frac{-1}{2}$

(घ) $z = \frac{-4}{3}$ or $\frac{4}{3}$ (ङ) $z = 0$ or $\frac{-1}{5}$ (च) $y = \frac{-7}{2}$ or $\frac{7}{2}$

2. (क) $x = -5$ or 5 (ख) $y = 5$ or 3 (ग) $a = -11$ or 2

(घ) $x = 2$ or -2 (ङ) $x = 12$ or -2 (च) $x = 6$ or 3

(छ) $x = \frac{1}{7}$ or -2 (च) $y = 11$ or 7

3. $x^2 - 10x + 21 = 0$ 4. $y^2 + 3y + 2 = 0$

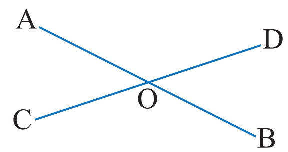
पाठ 19 रेखा र कोण
(Line and angle)

पुनरवलोकन

अन्जु र विनयले उनीहरूले पहिलो तहमा जोडी रेखाका सम्बन्धमा पढेका कुरालाई पुनः सम्झनका लागि छलफल गरेँ । पहिले पढिसकेका विषयवस्तुमा स्पष्ट हुन एक अर्कालाई सहयोग गर्ने निधो पनि गरेँ । उनीहरूले के के विषयवस्तु अध्ययन गरेका रहेछन्, हेरौँ :

(i) प्रतिच्छेदित रेखा (Intersecting lines)

चित्रमा AB र CD दुई रेखाखण्ड विन्दु 0 मा आपसमा काटिएका छन् ।



यसरी आपसमा काटिएका रेखालाई प्रतिच्छेदिन रेखा भनिन्छ र काटिएको विन्दुलाई प्रतिच्छेदित रेखा हुन् र 0 प्रचिच्छेदित विन्दु हो ।

(ii) समानान्तर रेखा (Parallel lines)

चित्रमा रुलरको विपरित किनारा पट्टीबाट दुईओटा रेखाखण्ड खिचिएको छ । दुवै रेखाखण्डलाई आपसमा लम्बाउँदा कुनै विन्दुमा प्रतिच्छेदन हुँदैन । यसरी एउटै समतल सतहमा रेखालाई दुवैतिर जति लम्बाउँदा पनि आपसमा प्रतिच्छेदन हुँदैनन् भने त्यस्ता रेखालाई समानान्तर रेखा भनिन्छ । चित्रमा रेखाखण्ड AB र CD एक आपसमा समानान्तर छन् । सङ्केतमा AB||CD लेखिन्छ ।

अब, हामी जोडी रेखा प्रतिच्छेदित हुँदा बन्ने जोडा कोणका बारेमा अध्ययन गरौँ :

19.1 जोडा कोण परिचय (Introduction of pair of angles)

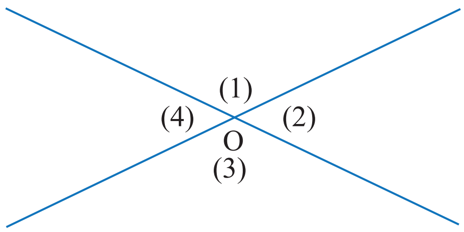
(i) आसन्न कोण (Adjacent angles)

चित्रमा सहायक बाटाले मुख्य बाटासँग दुईओटा कोण बनाएको छ। अर्थात् दुवै कोणको साझा भुजाको रूपमा सहायक बाटालाई लिन सकिन्छ।

यसरी एउटै शीर्षविन्दु र साझा भूजा भएर बनेका जोडा कोणलाई आसन्न कोण (Adjacent Angles) भनिन्छ।

क्रियाकलाप

- दुईओटा सिधा रेखा आपसमा प्रतिच्छेदित हुने गरी खिच्नुहोस्।
- काटिएको विन्दुको नाम 0 दिनुहोस्।
- रेखा आपसमा काटिँदा कतिओटा आसन्न कोण बन्छन् ? लेख्नुहोस्।



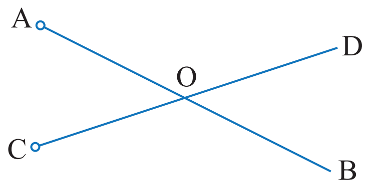
दुईओटा सिधा रेखा आपसमा काटिँदा चित्रमा देखाए जस्तै चारओटा कोण बन्छन्। यहाँ कोण (1 र 2), (2 र 3) (3 र 4) र (4 र 1) को जोडिलाई आसन्न कोण भनिन्छ।

दुई सरल रेखा आपसमा काटिँदा बन्ने जोडी कोणमा एउटै शीर्षविन्दु र एउटै साझा भुजा छन् भने त्यस्ता कोणलाई आसन्न कोण भनिन्छ।

(ii) शीर्षाभिमुख कोण (Vertically opposite angles)

चित्रमा कैँची देखाइएको छ। कैँचीको दुई पाटा एकआपसमा काटिएका छन्। दुई पाटा एक आपसमा काटिँदा विपरीततिर बनेको कोणलाई शीर्षाभिमुख कोण भनिन्छ।

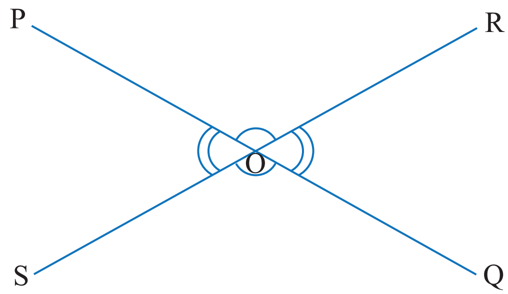
चित्रमा कोण ($\angle$AOC र $\angle$BOD) र ($\angle$AOD र $\angle$BOD) विपरित शीर्षाभिमुख कोण हुन्।



दुई सिधा रेखा एकआपसमा काटिँदा विपरीततिर बनेका जोडा कोणलाई शीर्षाभिमुख कोण (Vertically opposite angles) भनिन्छ।

क्रियाकलाप

- दुईओटा सिधा रेखा PQ र RS आपसमा काटिने गरी खिच्नुहोस् ।
- काटिएको विन्दुको नाम 0 दिनुहोस् ।
- रेखा आपसमा काटिँदा कतिओटा शीर्षाभिमुख कोण बन्छन् ? लेख्नुहोस् ।

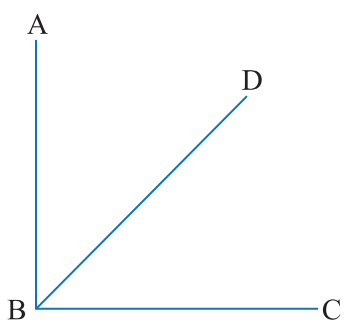


चित्रमा कोण ($\angle$POR र $\angle$SOQ) र ($\angle$POS र $\angle$ROQ) को जोडीलाई शीर्षाभिमुख कोण भनिन्छ ।

(iii) समपूरक कोण (Complementary angles)

- चाँदको सहायताले एउटा 90° को कोण खिच्नुहोस् ।
- उक्त कोणको विन्दु B बाट अर्को सिधा रेखा BD खिच्नुहोस् ।
- अब, चाँदको प्रयोग गरी ABD र DBC को नाप लिनुहोस् ।
- ABD र DBC को नापको योगफल कति हुन्छ ? निकाल्नुहोस् ।

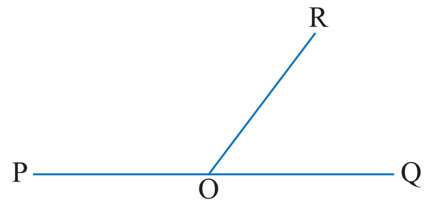
चित्रमा ABD र DBC को योगफल 90° भयो ।



यदि दुईओटा कोणको योगफल 90° (एक समकोण) हुन्छ भने त्यस्ता कोणलाई एक अर्कोका समपूरक कोण भनिन्छ ।

(vi) परिपूरक कोण : (Supplementary angles)

- एउटा सिधा रेखा PQ खिच्नुहोस् ।
- रेखा एत्त मा कुनै विन्दु o लिनुहोस् ।
- OR रेखा खिच्नुहोस् ।
- अब POR र ROQ नापेर हेर्नुहोस् ।
- POR र ROQ लाई जोड्दा कति डिग्री हुन्छ ?



चित्रमा $\angle POR + \angle ROQ = 180°$ छ ।

अतः $\angle POR$ र $\angle ROQ$ परिपूरक कोण हुन् ।

> यदि दुईओटा कोणको योगफल दुई समकोण वा 180° हुन्छ भने त्यस्ता कोणलाई एकअर्काका परिपूरक कोण भनिन्छ ।

यदि परिपूरक कोण एउटै सिधा रेखामा बनेका छन् भने तिनीहरू आसन्न कोण (Adjacent angles) हुन्छन् ।

(v) सरल कोण (Straight angles)

चित्रमा, एउटा सरल रेखा AB को एकैतिर बनेका आसन्न कोण x, y र z छन् । अब, यी कोणलाई नापेर हेरौँ : कोण x, y र z लाई जोड्यौ भने योगफल कति हुन्छ ? विचार गरौँ ।

> निष्कर्षः एउटा रेखाखण्डको कुनै विन्दुमा एकैतिर बनेका कोणको योगफल 180° हुन्छ । यसरी बनेको कोणलाई सरल कोण भनिन्छ ।

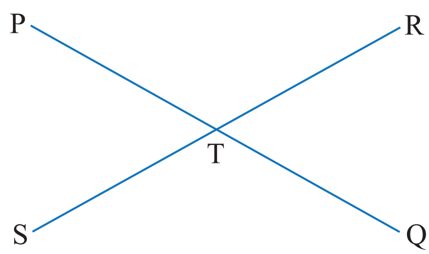
अभ्यासका लागि प्रश्न

1. तल दिइएका कोणमध्ये कुनकुन कोण आसन्न कोण हुन् र कुन कुन शीर्षाभिमुख कोण हुन्, लेख्नुहोस् :

(क) <PTS र <STQ

(ख) <PTR र <STQ

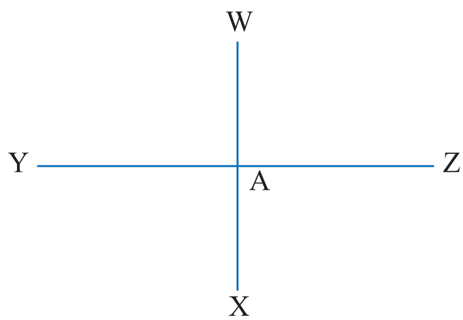
(ग) <PTS र <RWQ



(घ) <PTS र <PTR

(ङ) <RTQ र <QTS

2. सँगैको चित्रमा रेखा WX र YZ विन्दु A मा प्रतिच्छेदन भएका छन् । प्रतिच्छेदन भएका छन् । चित्रबाट चार जोडा आसन्न कोण र दुई जोडा शीर्षाभिमुख कोणको सूची बनाउनुहोस् ।



3. तल दिइएका कोणको परिभाषा लेख्नुहोस् :

(क) आसन्न कोण

(ख) शीर्षाभिमुख कोण

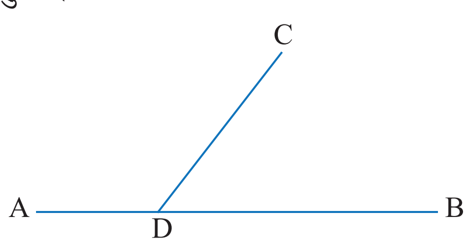
(ग) परिपूरक कोण

(घ) सरल कोण

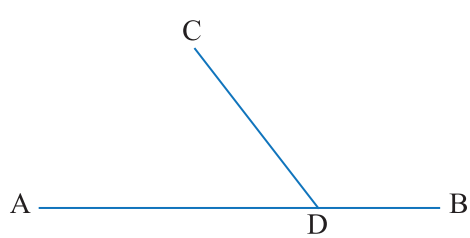
19.2 जोडी कोणको प्रयोगात्मक परीक्षण (Experimental verification of pair of angles)

परीक्षण 1

एउटा सिधारेखाले अर्को सिधा रेखासँग एकैतिर बनाएका आसन्न कोणको योगफल 180° हुन्छ ।



चित्र I



चित्र II

एउटा रेखा AB खिच्नुहोस् । रेखा AB को कूनै विन्दु D बाट CD रेखा खिच्नुहोस् ।

अब, चाँदको सहायताले कोण ∠ADC र ∠BDC लाई नाप्नुहोस् र तलको तालिकामा भर्नुहोस् :

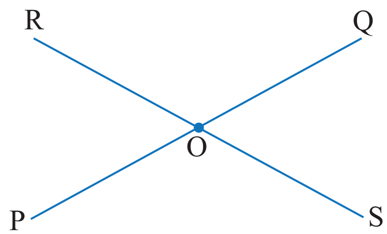
चित्र नं.	∠ADC	∠BDC	परिणाम
I			
II			

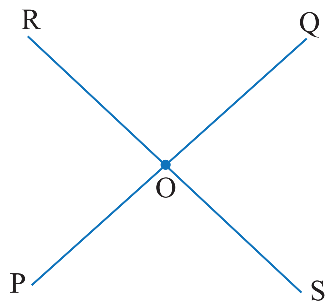
परीक्षणको निष्कर्ष के होला ? छलफल गर्नुहोस् ।

निष्कर्ष : एउटा सिधारेखाले अर्को सिधा रेखासँग एकैतिर बनाएका आसन्न कोणको योगफल 180° आउँछ ।

परीक्षण 2

दुईओटा सिधा रेखा एक आपसमा काटिँदा बन्ने शीर्षाभिमुख कोण बराबर हुन्छन् ।





दुई सिधा रेखा PQ र RS लाई विन्दु 0 मा काटिने गरी खिच्नुहोस् ।

अब चाँदको सहायताले कोण क्रमशः <POQ, <QOS, <ROP र <POS लाई नाप्नुहोस् र तलको तालिकामा भर्नुहोस् :

चित्र	<ROP	<ROQ	<QOS	<POS	परिणाम
I					
II					

निष्कर्ष के आउँला ? छलफल गर्नुहोस् ।

निष्कर्षः दुईओटा सिधा रेखा एक आपसमा काटिँदा बन्ने शीर्षाभिमुख कोण बराबर हुन्छन् ।

उदाहरण 1 : सँगै दिइएको चित्रबाट a को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान :

$a + 30° = 180°$

Or, $a = 180° - 30°$

[∴ आसन्न कोणको योगफल = 180° हुन्छ ।]

A = 150o

उदाहरण 2 : दिइएको चित्रबाट ∠AOC को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।:

समाधान :

$\angle AOC = \angle BOD$ (∴ शीर्षाभिमुख कोण हुनाले)

$\angle \therefore AOC = 80°$

उदाहरण 3 : दिइएको चित्रबाट x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान :

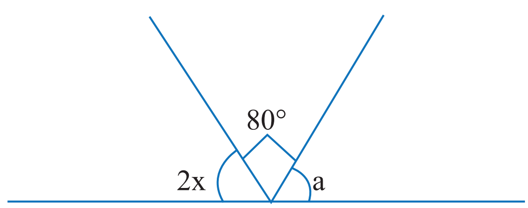
$2x + 90° + x = 180°$ [सिधा रेखामा बनेका आसन्न कोणको योगफल 180° हुन्छ ।]

or, $3x + 90° = 180°$

or, $3x = 180° - 90°$

or, $x = \dfrac{90°}{3}$

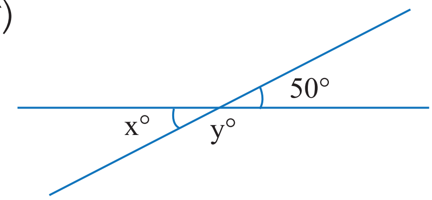
$\therefore$ $x = 30°$



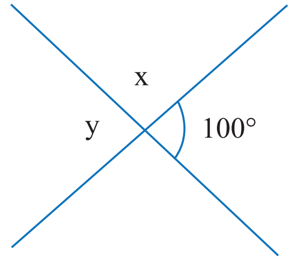
अभ्यासका लागि प्रश्न

1. तल दिइएको चित्रबाट x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क)

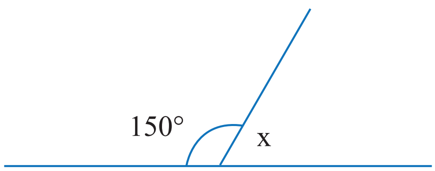


(ख)

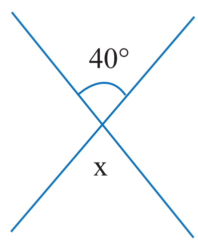


2. तल दिइएका चित्रबाट x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

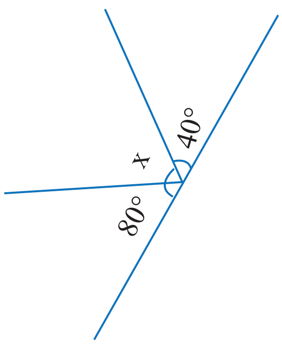
(क)



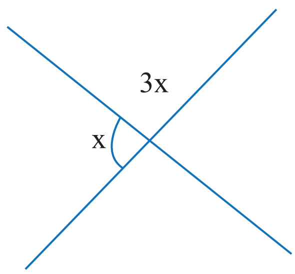
(ख)



(ग)



(घ)



उत्तर

1. (क) $x = 50°, y = 130°$ (ख) $x = 80°, y = 100°$

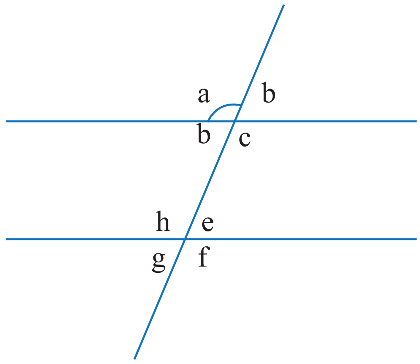
2. (क) $x = 30°$ (ख) $x = 40°$

(ग) $x = 60°$ (घ) $x = 45°$

19.3 दुईओटा सरल रेखालाई एउटा छेदकले काट्दा बन्ने कोण (Angles formed by a transversal with two straight lines)

क्रियाकलाप

चित्रमा दुई सरल रेखालाई एउटा छेदकले काटेको छ ।



चित्रको अवलोकन गरी सोधिएका प्रश्नका बारेमा विचार गर्नुहोस् :

(क) कति ओटा कोण बनेका छन् ?

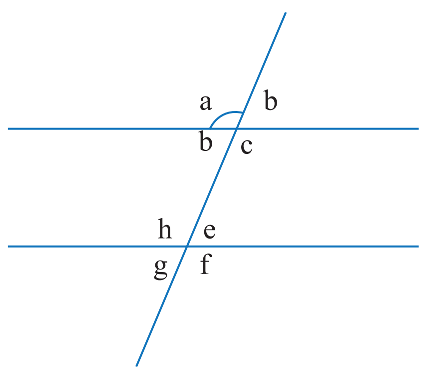
(ख) कुन कुन कोण बाहिरी कोण हुन् ?

(ग) कुन कुन कोण भित्री कोण हुन् ?

चित्रमा आठओटा कोण छन् । जसमा कोण a, b, g र f दुई सरल रेखा भन्दा बाहिर छन् । त्यसैले यी कोण भनिन्छ ।

यसै गरी कोण c, d, e, h दुई सरल रेखाका बिचमा अर्थात् भित्र छन् । त्यसैले कोण c, d, e, h लाई भित्री कोण भनिन्छ ।

अब, अन्य कस्ता कस्ता जोडी कोण बन्दा रहेछन् ? हेरौँ है ।



(i) एकान्तर कोण (Atternate angles)

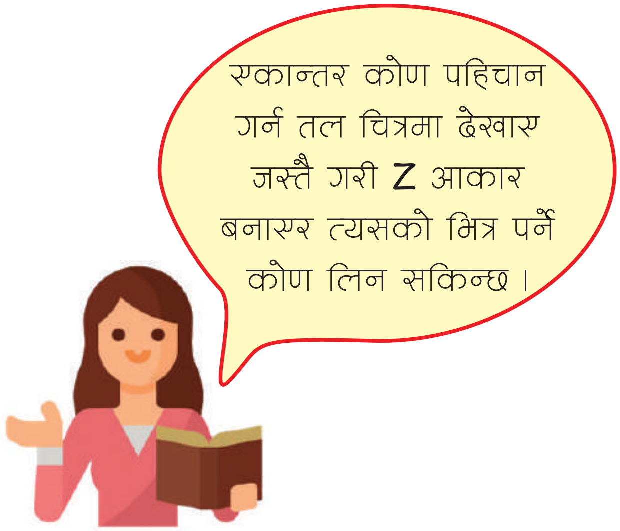
चित्रमा कोण d र e लाई हेर्नुहोस् ।

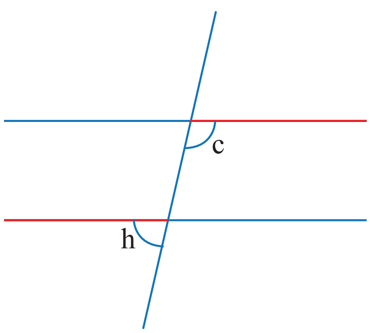
यी दुवै कोण छेदकको दुवैतिर परेका छन् । दुवै कोण भित्री अनासन्न कोण हुन् । यसरी छेदकको

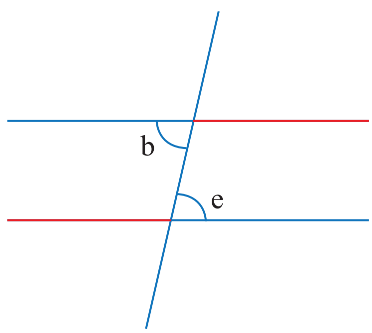
दुवैतिर परेका भित्री अनासन्न कोणलाई एकान्तर कोण भनिन्छ ।

त्यसैले कोण d र e एकान्तर कोण हुन् । यस्तै अर्को कुनै जोडी कोण पनि एकान्तर कोण छ कि ? विचार गर्नुहोस् ।

दुई सरल रेखालाई छेदकले काट्दा छेदको दुवैतिर परेका भित्री अनासन्न कोणलाई एकान्तर कोण (Alternate angles) भनिन्छ ।





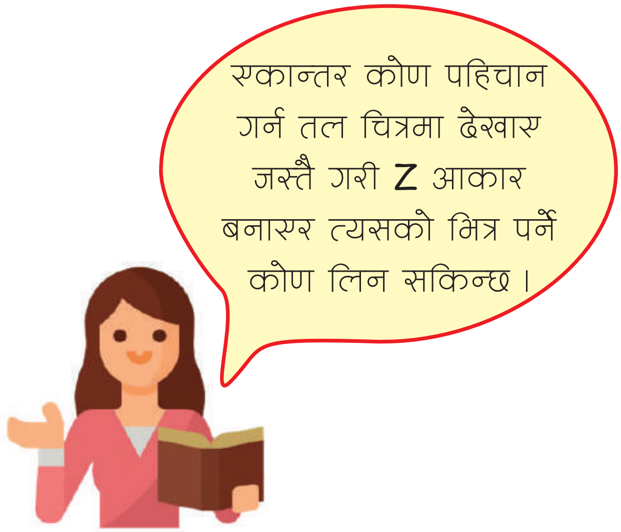


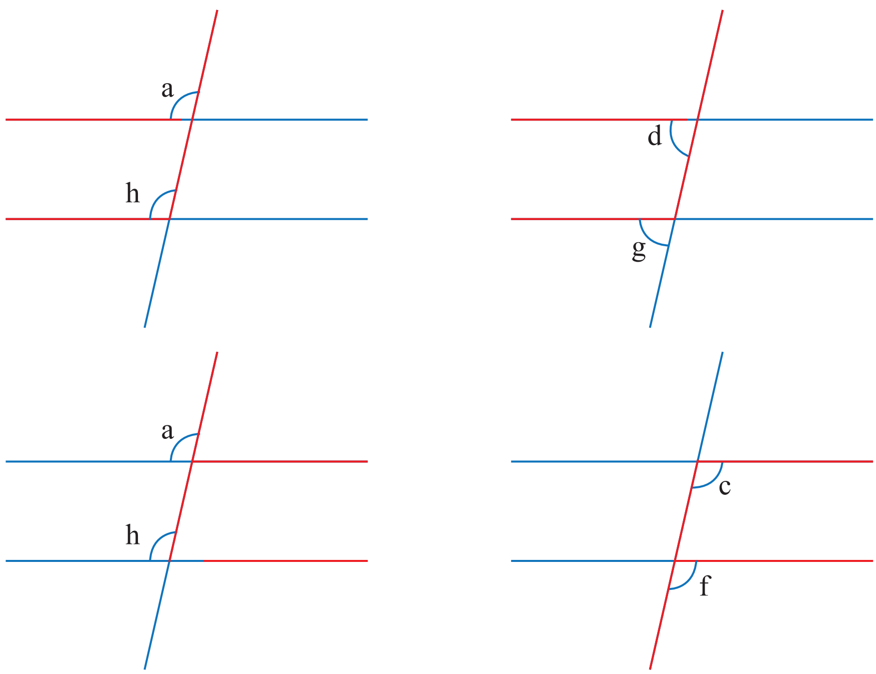
(ii) सङ्गत कोण (Corresponding angles)

चित्रमा, b र e लाई हेर्नुहोस् । दुवै कोण छेदकको एकैतिर परेका छन् ।

त्यसैले कोण d र e एकान्तर कोण हुन् । यस्तै अर्को कुनै जोडी कोण पनि एकान्तर कोण छ कि ? विचार गर्नुहोस् । हो, चित्रमा कोण (a र b), (d र g) र (c र f) को जोडीलाई सङ्गत कोण भनिन्छ ।

दुई सरल रेखालाई छेदकले काट्दा छेदकको एकैतिर परेका एउटा भित्री र अर्को बाहिरी अनासन्न कोणलाई सङ्गत कोण (Corresponding angles) भनिन्छ ।





(ii) क्रमागत भित्री कोण (Co-interior angles)

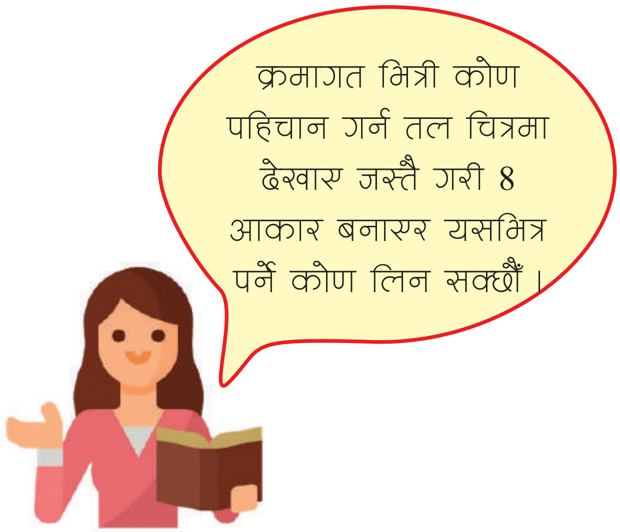
चित्रमा, कोण c र e लाई हेर्नुहोस् । यी दुवै भित्री अनासन्न कोण हुन् र दुवै छेदकको एकैतिर परेका छन् । यसरी छेदकको एकैतिर परेका भित्री अनासन्न कोणलाई क्रमागत

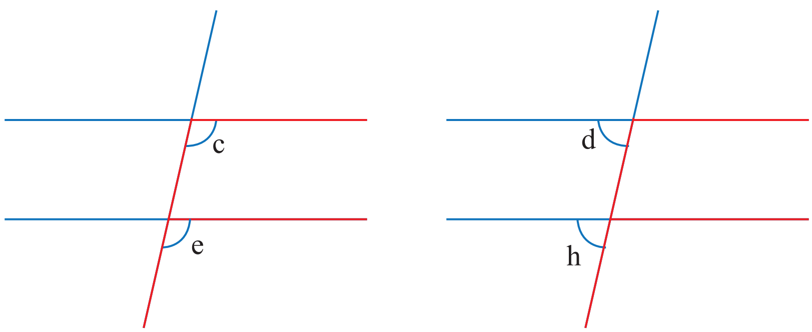
भित्री कोण भनिन्छ। त्यसैले कोण (c र e) को जोडीलाई क्रमागत भित्री कोण भनिन्छ।

चित्रमा अन्य यस्तै क्रमागत भित्री कोण छन् कि? विचार गर्नुहोस्।

कोण (d र h) को जोडी पनि क्रमागत भित्री कोण हो।

> दुई सरल रेखालाई एउटा छेदकले काट्दा बन्ने छेदकको एकैतिर परेका भित्री अनासन्न कोणलाई क्रमागत भित्री कोण (Co-interior angles) भनिन्छ।

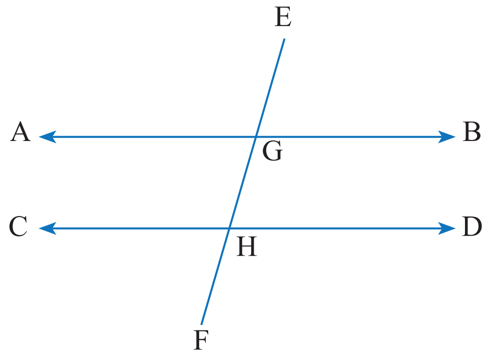




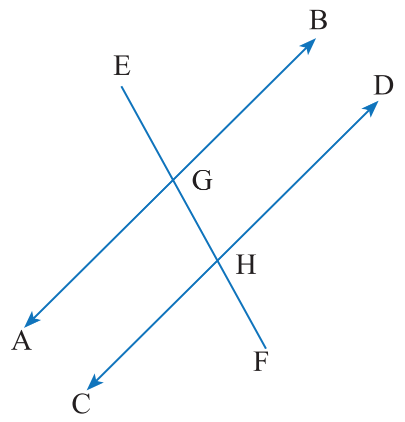
19.4 दुईओटा समानान्तर रेखालाई एउटा छेदकले काट्दा बन्ने कोणको सम्बन्ध

परीक्षण I : एकान्तर कोणको सम्बन्ध

चित्रमा दुईओटा समानान्तर रेखा AB र CD लाई छेदक EF ले क्रमशः विन्दु G र H मा काटेको छ।



चित्र I



चित्र II

अब, तालिकामा दिइएका कोण चाँद (प्रोट्याक्टर) को प्रयोग गरेर नाप्नुहोस् र तालिकामा भर्नुहोस् :

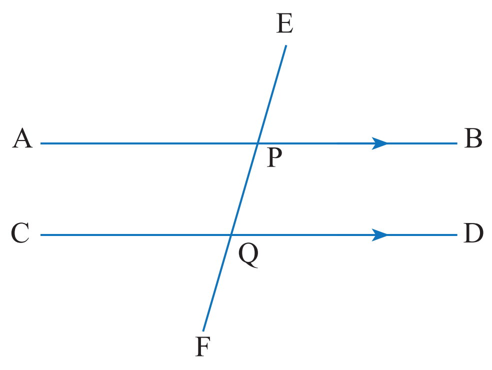
चित्र	∠AGH	∠GHD	परिमाण	∠BGH	∠GHC	परिमाण
I						
II						

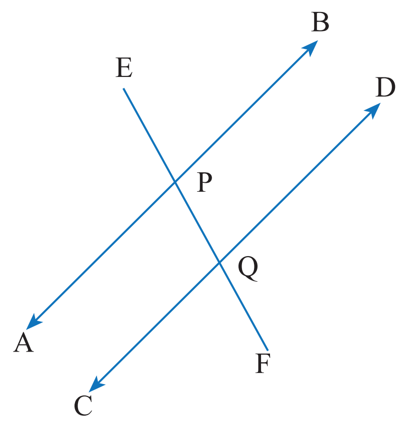
माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष आयो ? लेख्नुहोस् ।

निष्कर्ष : दुईओटा समानान्तर रेखालाई एउटा छेदकले काट्दा बनेका एकान्तर कोण बराबर हुन्छन् ।

परीक्षण II : क्रमागत भित्री कोणको योगफल

चित्रमा देखाइएको जस्तै विभिन्न अवस्थामा दुई समानान्तर रेखालाई छेदकले गरिएका फरक फरक दुईओटा चित्र बनाउनुहोस् ।





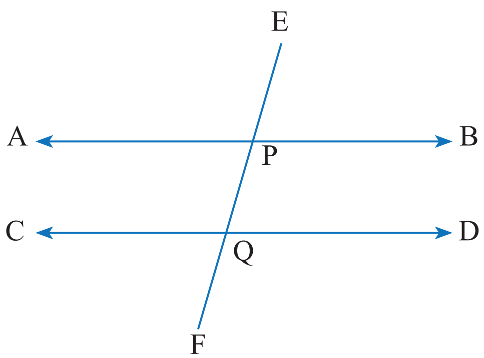
अब, प्रोट्र्याक्टरको सहायताले दिइएका कोण नाप्नुहोस् र तालिकामा भर्नुहोस् :

माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष आयो ? लेख्नुहोस् ।

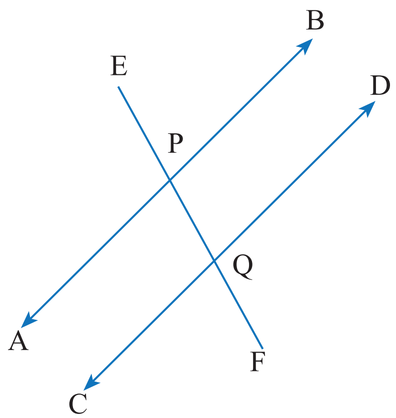
निष्कर्ष : दुई समानान्तर रेखालाई छेदकले काट्दा बन्ने क्रमागत भित्री कोणको योगफल 180° हुन्छ ।

परीक्षण III : सङ्गत कोणको सम्बन्ध

चित्रमा देखाइएको जस्तै दुई समानान्तर रेखालाई छेदकले काटिएका फरक फरक दुईओटा चित्र बनाउनुहोस् ।



चित्र I



चित्र II

अब, प्रोट्र्याक्टरको सहायताले तालिकामा दिइएका कोण नाप्नुहोस् र भर्नुहोस् :

चित्र	∠EPB	∠PQD	परिमाण	∠BPQ	∠PQD	परिमाण
I						
II						

माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष आयो ? लेख्नुहोस् ।

निष्कर्ष: दुई समानान्तर रेखालाई छेदकले काट्दा बन्ने सङ्गत कोण बराबर हुन्छन् ।

उदाहरण 1

चित्रमा दुईओटा समानान्तर रेखालाई छेदकले काटेको छ । दिइएको कोणको आधारमा बाँकी कोण a, b, c, d र e को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान :

(i) $a + 80°$ (आसन्न कोणको योगफल 180° हुनाले)

or, $a = 180° - 80°$

$\therefore$ $a = 100°$

$b = a$ (शीर्षाभिमुख कोण बराबर हुने भएकाले)

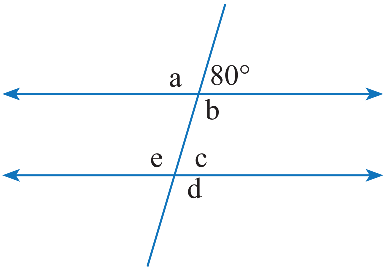
$\therefore$ $b = 100°$

$b + c = 180°$ (क्रमागत भित्री कोणको योगफल 180° हुनाले

or, $100° + c = 180°$

or, $c = 180° - 100°$

$\therefore$ $c = 80°$



$d = b$ (सङ्गतकोण बराबर हुने भएकाले)

$\therefore$ $c = 80°$

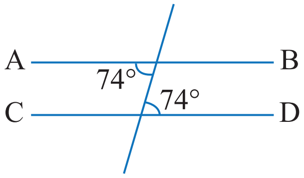
$e = d$ (शीर्षाभिमुख कोण बराबर हुने भएकाले

$\therefore$ $e = 100°$

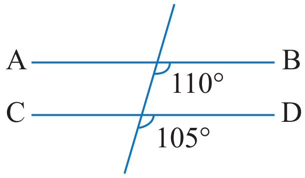
उदाहरण 2

कोणको नापको आधारमा दुई रेखा AB र CD आपसमा समानान्तर छन् वा छैनन् ?

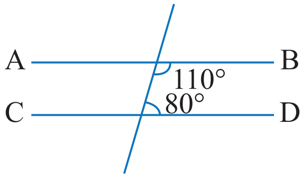
(क)



(ख)



(ग)



समाधान :

(क) चित्रमा एकान्तर कोण बराबर छन्, त्यसैले दुई रेखा AB र CD आपसमा समानान्तर छन् ।

(ख) चित्रमा सङ्गत कोण दिइएका छन् तर बराबर छैनन् । त्यसैले, दुई रेखा AB र CD

आपसमा समानान्तर छैनन् ।

(ग) चित्रमा क्रमागत भित्री कोण दिइएका छन् । यी कोणलाई जोड्दा 180° भन्दा धेरै हुन्छ । त्यसैले दुई रेखा AB र CD आपसमा समानान्तर छैनन् ।

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. दिइएको चित्रबाट जोडा कोणको नाम लेख्नुहोस् :

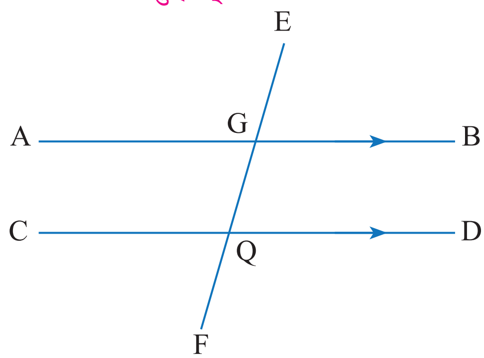
(a) ∠AGE र ∠GHC

(b) ∠AGH र ∠GHD

(c) ∠BGH र ∠GHD

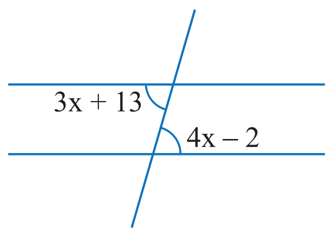
(d) ∠AGE र ∠EGB

(e) ∠EGB र ∠AGH

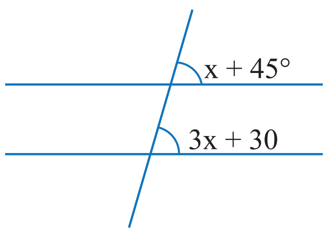


2. दिइएको चित्रबाट x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

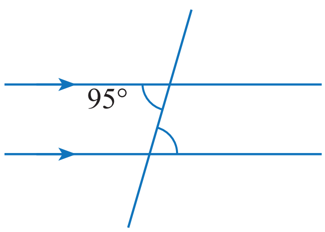
a.



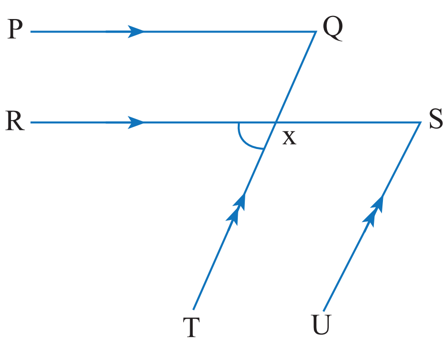
b.



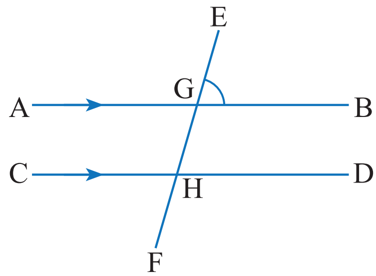
c.



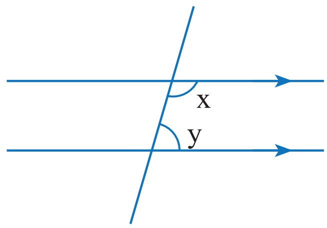
3. दिइएको चित्रबाट ∠RXT को सङ्गत कोण लेख्नुहोस् :



4. दिइएको चित्रमा $\angle EGB$ को सङ्गत कोण कुन हो ?

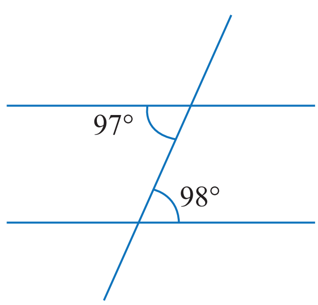


5. दिइएको चित्रबाट x र y को सम्बन्ध लेख्नुहोस् :

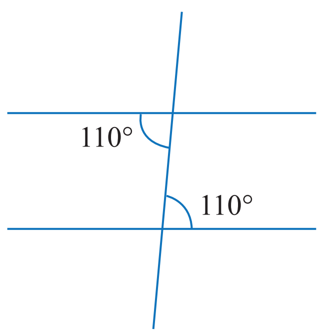


6. कोणको नापको आधारमा दुई रेखा PQ र RS आपसमा समानान्तर छन् वा छैनन् ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।

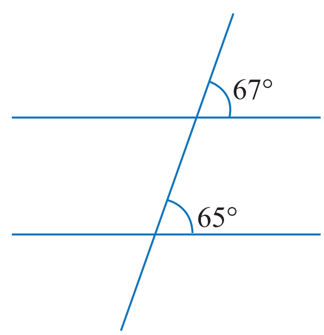
a.



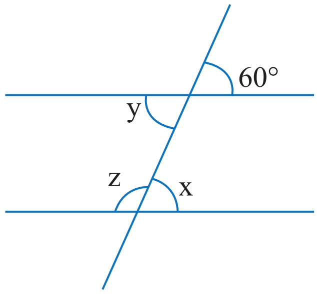
b.



c.



7. **दिइएको चित्रबाट x, y र z को मान निकाल्नुहोस् :**



8. **दुईओटा समानान्तर रेखा खिची तिनीहरूलाई छेदकले काट्दा बन्ने एकान्तर कोण र सङ्गति कोण देखाउनुहोस् ।**

उत्तर

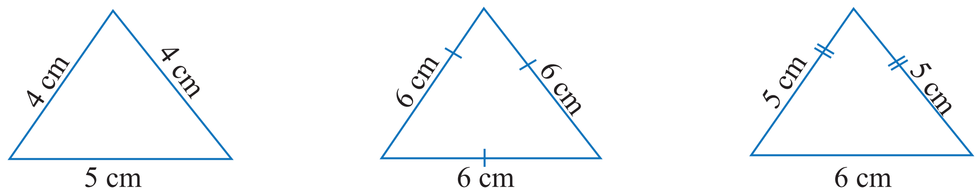
1. (क) x = 150 (ख) x = 150 (ग) x = 850
2. उत्तर सहजकर्तालाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 20

समतलीय आकृति
(Plane Figures)

लखनले कापिमा त्रिभुजका चित्र कोर्दै तह -3, भाग 1 मा सिकेको त्रिभुजको वर्गीकरणका बारेमा स्मरण गर्दै रहेछन् । उसले स्मरण गरेका विषयवस्तु हामी पनि हेरौँ :

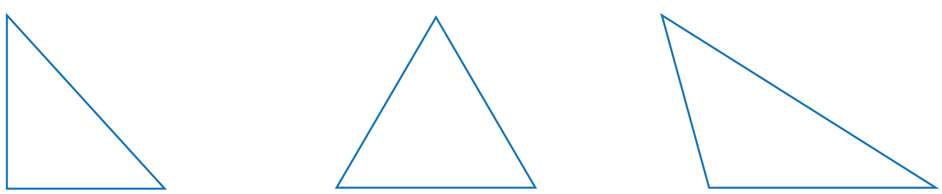
(क) भुजाको आधारमा त्रिभुजको वर्गीकरण (Classification of Triangles based on the sides)



त्रिभजुका तीनओटा भुजा मध्ये कुनै पनि भुजाको नाप एक आपसमा बराबर छैनन् भने त्यस्ता त्रिभुजलाई विषयबाहु त्रिभुज भनिन्छ ।

- कुनै दुईओटा भुजाका नाप बराबर भएको त्रिभुजलाई समद्विबाहु त्रिभुज भनिन्छ ।
- तीनओटै भुजाका नाप आपसमा बराबर भएको त्रिभुजलाई समबाहु त्रिभुज भनिन्छ ।

(ख) कोणका आधारमा त्रिभुजको वर्गीकरण (Classification of Triangles based on the Angles)



- यदि कुनै त्रिभुजका एउटा कोणको नाप 90° छ भने उक्त त्रिभुजलाई समकोणी त्रिभुज भनिन्छ ।
- यदि कुनै त्रिभुजको सबै कोणको नाम 90° भन्दा सानो छ भने उक्त त्रिभुजलाई न्यूनकोणी त्रिभुज भनिन्छ ।
- यदि कुनै त्रिभुजको एउटा कोणको नाम 90° भन्दा ठुलो छ भने उक्त त्रिभुजलाई

अधिककोणी त्रिभुज भनिन्छ ।

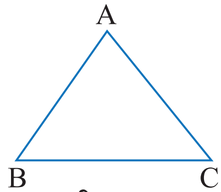
अब, हामी त्रिभुजका गुणको खोजी गरी परीक्षण गर्ने छौँ ।

20.1 त्रिभुजका गुणको पहिचान र परीक्षण (Identification and verification of the properties of triangles)

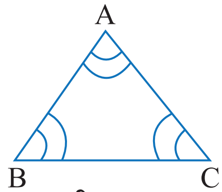
परीक्षण I : त्रिभुजका भित्री कोणको योगफलको परीक्षण

क्रियाकलाप 1

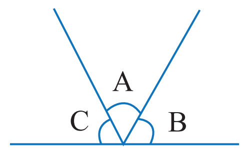
एउटा कापीको पाना लिनुहोस् । उक्त पानामा निश्चित नाप भएको एउटा त्रिभुज बनाउनुहोस् । अब चित्र II मा देखाएको जस्तै गरी तीनओटा कोणलाई काट्नुहोस् :



चित्र I



चित्र II

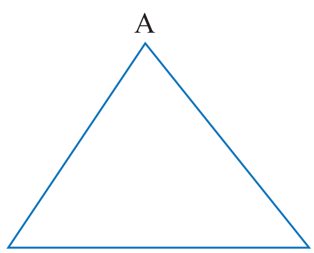


चित्र III

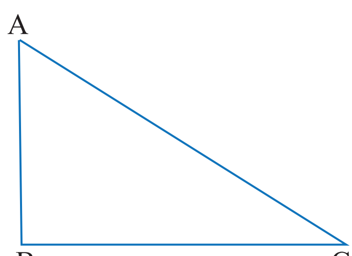
त्रिभुजको तीनओटै कोण मिलाएर राख्दा सरल कोण बनेको छ। सरल कोणमा बनेका कोणको योगफल 180° हुन्छ। त्यसैले, त्रिभुजका तीनओटा भित्री कोणको योगफल 180° हुन्छ।

क्रियाकलाप 2

चित्रमा देखाइएजस्तै फरक फरक आकार र नापका दुईओटा त्रिभुज बनाउनुहोस् :



चित्र I



चित्र II

अब, प्रोट्र्याक्टरको सहायताले दुवै चित्रबाट तल दिइएका कोणको नाप लिई तालिकामा भर्नुहोस् :

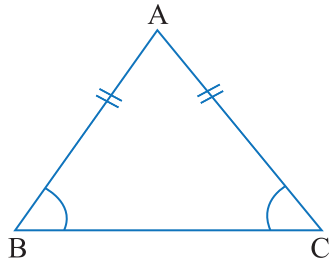
चित्र	$\angle BAC$	$\angle ABC$	$\angle ACB$	$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB$	नतिजा
I					
II					

तालिकाबाट के निष्कर्ष आयो ? लेख्नुहोस् :

निष्कर्ष :

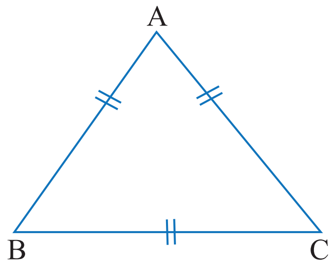
समद्विबाहु र समबाहु त्रिभुजका विशेषता

(क) टीकादेवी घलेले दुईओटा बराबर नाप र एउटा फरक नापको सिन्का प्रयोग गरेर तलको जस्तो त्रिभुजको चित्र बनाइन् :



त्रिभुजका सबै कोण नापेर हेदा उनले आधारमा भएका कोण ABC र ACB बराबर देखिन् ।

(ख) सनमले तीनओटा एकै नापका सिन्काको प्रयोग गरेर तलको जस्तो त्रिभुजको चित्र बनाए ।

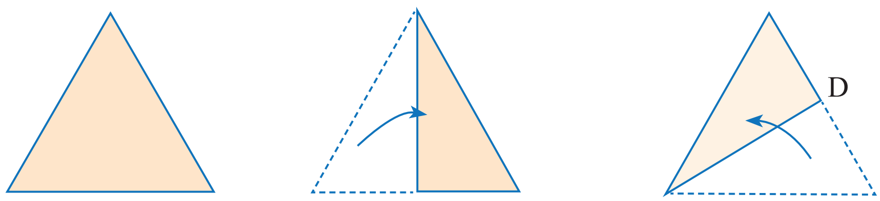


त्रिभुजका सबै कोण नापेर हेर्दा एउटै नापका पाएँ । अर्थात् सबै भुजा बराबर भएको त्रिभुजको सबै कोण पनि बराबर भएको पाएँ ।

परीक्षण II : समबाहु त्रिभुजका सबै कोण बराबर हुन्छ भन्ने तथ्यको परीक्षण

क्रियाकलाप 3

एउटा चार्टपेपर लिनुहोस् र त्यसमा एउटा समबाहु त्रिभुज बनाउनुहोस् । उक्त त्रिभुजलाई कैँचीले काटेर निकाल्नुहोस् र चित्रमा देखाए जस्तै गरी पट्याउँदै जानुहोस् । त्यसपछि दिइएका प्रश्नका बारेमा छलफल गर्नुहोस् ।



(क) चित्रमा समबाहु त्रिभुज ABC को शीर्षविन्दु B लाई C मा पर्ने गरी पट्याउँदा कोण B र कोण C को सम्बन्ध कस्तो हुन्छ ?

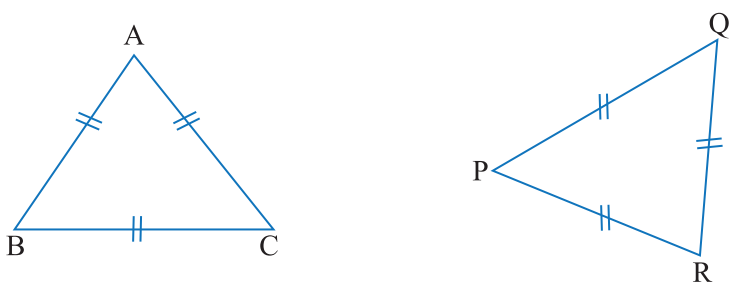
(ख) त्यस्तै शीर्षविन्दु C लाई A मा पर्ने गरी पट्याउँदा कोण C र कोण A को सम्बन्ध कस्तो हुन्छ ?

(ग) के समबाहु त्रिभुजका सबै कोण बराबर हुन्छन् ? के निष्कर्ष आयो ?

समबाहु त्रिभुजका सबै कोण बराबर हुन्छन् । त्यसैले प्रत्येक कोण 60° र 60° का हुन्छन् ।

क्रियाकलाप 4

फरक फरक नाप भएका दुईओटा समबाहु त्रिभुज बनाउनुहोस् ।



अब, प्रोट्याक्टरको सहायताले दुवै त्रिभुजका भित्री कोणको नाप लिई तालिकामा भर्नुहोस् :

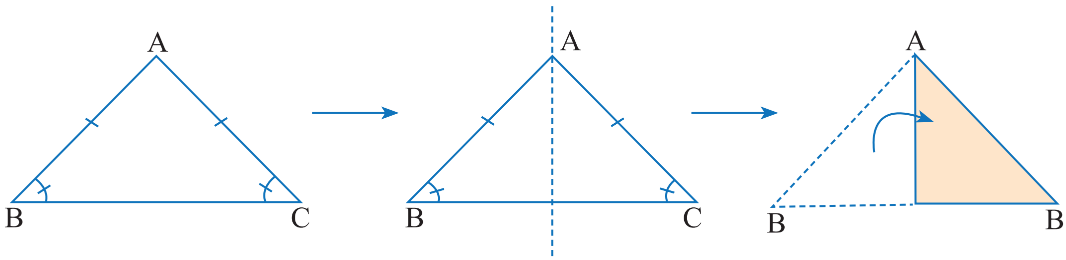
चित्र	$\angle QPR$	$\angle PQR$	$\angle PRQ$	नतिजा
I				
II				

तालिकाबाट के निष्कर्ष आयो ? लेख्नुहोस् ।

निष्कर्ष : समबाहु त्रिभुजका सबै कोण बराबर हुन्छन् । अर्थात् समबाहु त्रिभुजका प्रत्येक कोण 60° का हुन्छन् ।

परीक्षण III : समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोण बराबर हुन्छन् भन्ने तथ्यको परीक्षण

क्रियाकलाप 4 : एउटा कापीको पाना लिनुहोस् । दुईओटा भुजा बराबर भएको त्रिभुज बनाउनुहोस् । कैँचीको सहायताले काट्नुहोस् । अब चित्र II मा देखाएजस्तै गरी चिह्न लगाउनुहोस् । चित्र ३ मा जस्तै गरी शिर्षाविन्दु B र C लाई खप्टिने गरी पट्याउनुहोस् ।



कोण B र C को बिचमा कस्तो सम्बन्ध छ ? के निष्कर्ष आयो ?

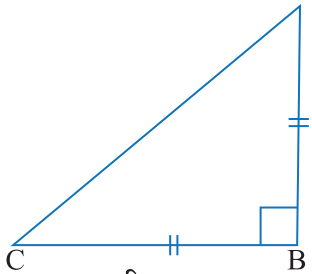
समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोण बराबर हुन्छन् ।

क्रियाकलाप 5 : दुईओटा फरक फरक नापका समद्विबाहु त्रिभुज बनाउनुहोस् । प्रोट्याक्टरको सहायताले बराबर भुजाको आधारमा बनेका कोणको नाप लिनुहोस् । तालिकामा भरी निष्कर्ष लेख्नुहोस् ।

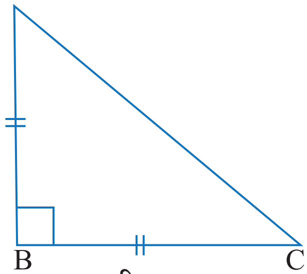
परीक्षण IV : समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजका प्रत्येक आधारकोण 45° हुन्छ भन्ने तथ्यको परीक्षण

क्रियाकलाप 6 :

फरक फरक नापका दुईओटा समकोणी समद्विबाहु त्रिभुज बनाउनुहोस् :



चित्र I



चित्र II

अब, चाँदको सहायताले त्रिभुजका आधारका कोणको नाप लिई तालिकामा भर्नुहोस् :

चित्र	∠BAC	∠BCA	परिणाम
I			
II			

तालिकाबाट के निष्कर्ष आयो ? लेख्नुहोस् ।

निष्कर्ष : समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजका आधारमा कोण बराबर 45° हुन्छन् ।

उदाहरण 1 : दिइएको चित्रको आधारमा x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

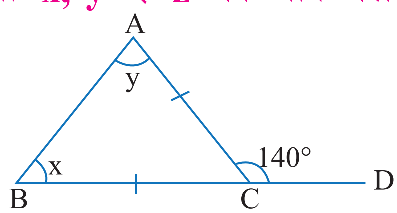
समाधान : ∠BAC + ∠ABC + ∠ ACB = 180° (त्रिभुजको भित्री कोणको योगफल 180° or, 70° + 50° + x = 180° हुनाले ।)

or, 120° + x = 180°0

or, x = 180° – 120°

∴ x = 60°

उदाहरण 2 : दिइएको चित्रको आधारमा x, y र z को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान :

(i) $\angle ABC + \angle ACD = 180°$ (∵आसन्न कोण भएकाले)

or, $\angle BAC + 140° = 180°$

or, $\angle ACB = 180° - 140°$

$\therefore$ $\angle ACB = 40°$

(ii) $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180°$

or, $y + x + 40° = 180°$

or, $y + y + 40° = 180°$

or, $2y + 40° = 180°$

or, $2y = 140°$

or, $y = \dfrac{140°}{2}$

$\therefore$ $y = 70°$

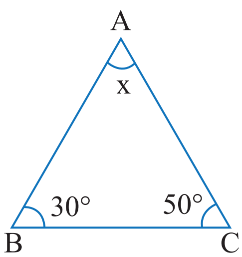
(iii) $x = y$

$\therefore$ $x = 70°$

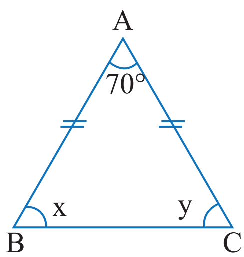
अभ्यासका लागि प्रश्न

1. तलका त्रिभुजबाट सोधिएका कोणको मान पत्ता लगाउनुहोस् :

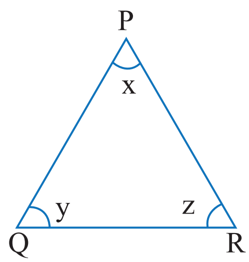
a.



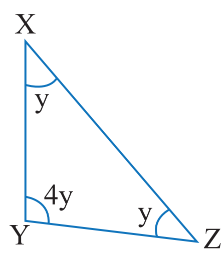
b.



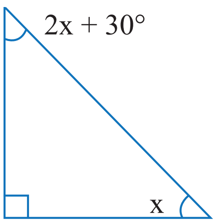
c.



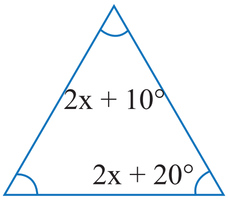
d.



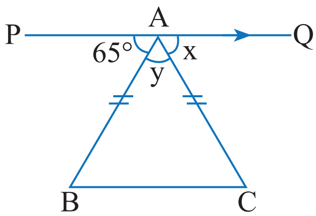
e.



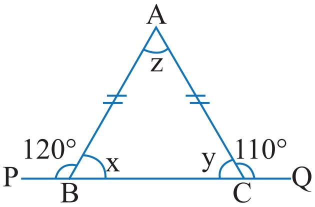
f.



g.



h.



2. तलका प्रश्नका फरक फरक नापका दुईओटा चित्र बनाएर प्रयोगात्मक परीक्षण गर्नुहोस् :

(क) त्रिभुजका तीनओटा भित्री कोणको योगफल 180° हुन्छ ।

(ख) समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोण बराबर हुन्छन् ।

(ग) समबाहु त्रिभुजको प्रत्येक कोण 60° हुन्छ ।

उत्तर

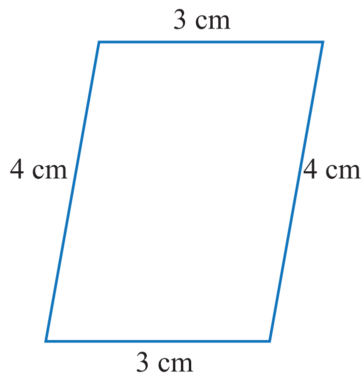
1. (क) $x = 100°$ (ख) $x = y = 55°$ (ग) $y = 30°$ (घ) $x = y = z = 60°$
   (ङ) $y = 20°$ (च) $x = 30°$ (छ) $x = 65°$, $y = 50°$
   (ज) $x = 60°, y = 70°$
2. उत्तर सहजकर्तालाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 21

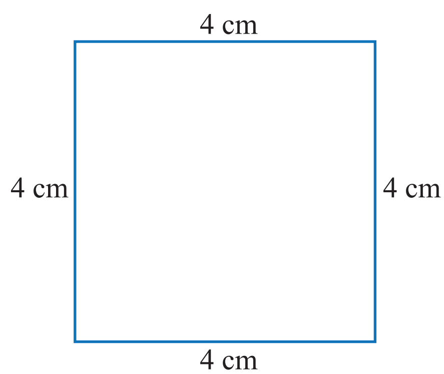
चतुर्भुजका गुणको पहिचान र परीक्षण
(Identification and verification of the properties of quadrilateral)

समानान्तर चतुर्भुज, वर्ग र आयतका गुणको पहिचान

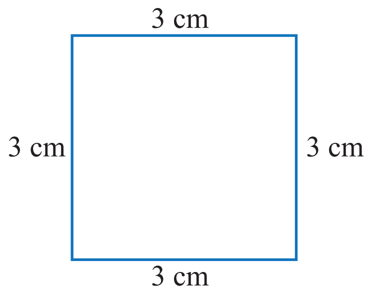
(क) हरिशले 4 से.मि..का दुईओटा र 3 से.मि. का दुईओटा सिन्काका छेउ विन्दु तल दिइएजस्तै गरी जोडेर आकृति बनाएँ ।



(ख) रिताले 4 से.मि. का चारओटा सिन्का मिलाएर तल दिइएजस्तै गरी जोडेर आकृति बनाइन् ।



(ग) अनिषाले 4 से.मि. दुईओटा र 3 से.मि. का दुईओटा सिन्काका छेउ विन्दु तल दिइएजस्तै गरी जोडेर आकृति बनाइन् ।



माथिका (क), (ख) र (ग) मा बनेका आकृतिका गुण के के हुन सक्छन् ? यी आकृतिको नाम के हो ? भनी विजयलाई सोध्दा उसले (क) लाई चतुर्भुज, (ख) लाई वर्ग र (ग) लाई आयत भन्यो ? तपाईँ विजयको भनाइ ठिक वा बेठिक के मान्नुहुन्छ ? हो, यहाँ विजयको उत्तरमा (क) को आकृतिलाई चतुर्भुज हो । सो चतुर्भुज त हो तर यसलाई समानान्तर चतुर्भुज भनिन्छ । बाँकी उसका उत्तर ठिक छन् ।

अब, यी (क) समानान्तर चतुर्भुज, (ख) वर्ग र (ग) आयतका के के गुण हुन्छन् ? तलको तालिका अध्ययन गर्दै छलफल गरौँ :

चतुर्भुजका किसिम	गुण (भुजासम्बन्धी)	गुण (कोणसम्बन्धी)
समानान्तर चतुर्भुज	-	सामुन्नेका भुजाको नाप बराबर हुन्छन् ।
-	सामुन्नेका भुजा आपसमा समानान्तर पनि हुन्छन् ।	सामुन्नेका कोण बराबर हुन्छन् ।
(तर समकोण हुँदैनन्)		
वर्ग	चारैओटा भुजाको नाप बराबर हुन्छ ।	सबै कोण बराबर हुन्छन् र हरेक कोण 90° को हुन्छ ।
आयत	सामुन्नेका भुजाको नाप बराबर हुन्छ ।	प्रत्येक कोणको नाप 90° हुन्छ अथवा सबै कोण बराबर हुन्छन् ।

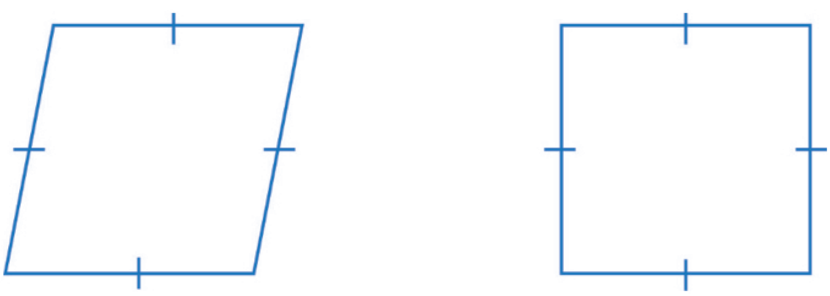
क्रियाकलाप :

चतुर्भुजका गुणका आधारमा चतुर्भुजको सम्बन्धलाई तलको जस्तो चार्टबाट देखाउन सकिन्छ कि सकिँदैन ? आफ्ना सम्पर्क कक्षाका शिक्षकसँग छलफल गरी निष्कर्ष लेख्नुहोस् ।

समबाहु चतुर्भुज, समलम्ब चतुर्भुज र चङ्गाका गुणको पहिचान र परीक्षण (Identification and verification of the properties of rhombus, trapezium and kite)

क्रियाकलाप

सरलाले बराबर नाप भएका आठओटा सिन्का लिइन् । चारओटा सिन्काबाट पहिलो चित्रमा देखाएजस्तो आकृति बनाइन् । बाँकी चारओटा सिन्काबाट दोस्रो चित्रमा देखाएजस्तो आकृति बनाइन् ।



माथिका दुई आकृति बिचमा के के समानता र भिन्नता छन् ? विचार गर्नुहोस् ।

हो, माथिका दुवै आकृति समबाहु चतुर्भुज हुन् । जसमा चित्र (I) लाई समबाहु चतुर्भुज र चित्र (II) लाई वर्ग भनिन्छ ।

क्र.सं.	समानता	असमानता
१.	दुवै चित्रमा चारओटै भुजा बराबर छन् ।	वर्गमा सबै कोण 90° हुन्छन् तर समबाहु चतुर्भुजमा हुँदैनन् ।
२.	दुवै चित्रका चारओटै कोणको योगफल 360° हुन्छ ।	वर्गका सबै तर समबाहु बराबर हुन्छन् तर समबाहु चतुर्भुजमा सम्मुख कोण मात्र बराबर हुन्छन् ।
३.	दुवै चित्रका विपरित भुजा समानान्तर हुन्छन् ।	वर्गका विकर्णहरूको लम्बाइ बराबर हुन्छन् तर समबाहु चतुर्भुजमा हुँदैनन् ।

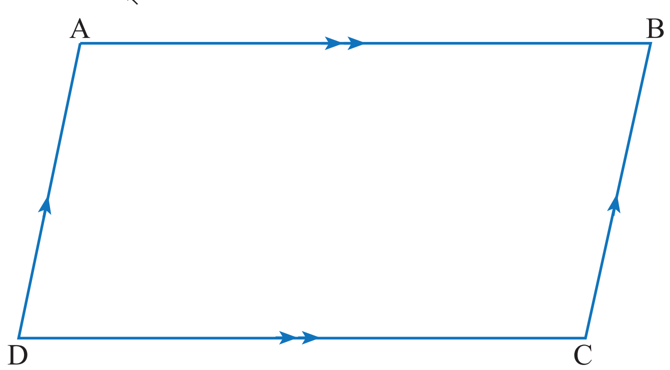
त्यसैले, सबै वर्ग समबाहु चतुर्भुज हुन तर सबै समबाहु चतुर्भुज वर्ग हुँदैनन् ।

समलम्ब चतुर्भुजका गुणको पहिचान र परीक्षण (Identification and verification of the properties of trapezium)

उपयुक्त समूहमा बसी निम्नलिखित प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) सँगै चित्रमा दिइएको आकृतिलाई के भनिन्छ ?

(ख) भुजा AD र BC तथा AB र DC कस्ता भुजा हुन् ? के भुजा AD र BC तथा AB र DC समानान्तर छन् ?



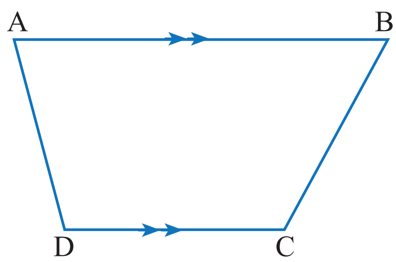
(ग) के सम्मुख कोण ∠BAD र ∠BCD तथा ∠ADC र ∠ABC बराबर छन् ?

(घ) यदि भुजा AD र BC वा AB र DC मध्ये कुनै एक जोडी भुजालाई मात्रै समानान्तर बनाउने हो भने कस्तो आकृति बन्छ होला ?

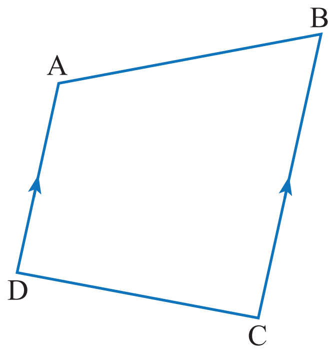
(ङ) के नयाँ बनेको आकृतिको सम्मुख भुजा तथा कोण पनि आपसमा बराबर हुन्छन् ?

यहाँ,

माथि दिइएको समानान्तर चतुर्भुजको कुनै एक जोडी भुजालाई मात्रै समानान्तर बन्ने गरी नयाँ आकृति बनाउँदा सँगैको चित्रमा देखाएको जस्तो चतुर्भुज बन्छ । यस्तो चतुर्भुजलाई समलम्ब चतुर्भुज भनिन्छ ।



चित्र (क)

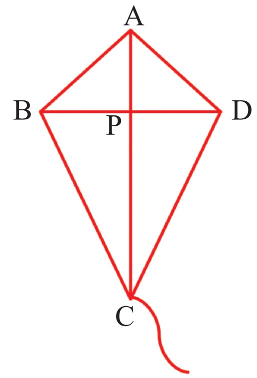


चित्र (ख)

एक जोडी सम्मुख भुजा मात्र समानान्तर भएको चतुर्भुजलाई समलम्ब चतुर्भुज (Trapezium) भनिन्छ ।

चङ्गाका गुणको पहिचान र परीक्षण (Identification and verification of the properties of Kite)

सँगैको चित्रमा दिइएको जस्तो चङ्गा कसरी निर्माण गर्ने होला ? दिइएको जस्तै चङ्गाको चित्र कापीमा कोर्नुहोस् र निम्नलिखित प्रश्नमा विचार गर्नुहोस् :



(अ) चङ्गा ABCD का कुन कुन भुजा बराबर छन् ?

(आ) कतिओटा विकर्ण छन् ?

(इ) के ती विकर्णको लम्बाइ बराबर छ ?

(ई) लामो र छोटो विकर्णका नाम लेख्नुहोस् ।

(उ) के BP र PD बराबर छन् ?

(ऊ) ∠APB र ∠APD का नापहरू कति कति हुन्छन् ? प्रोट्याक्टरको प्रयोग गरी नाप्नुहोस् ।

(ए) चङ्गा ABCD मा कतिआटा समद्विबाहु त्रिभुज छन् ? तिनीहरू कुन कुन हुन् ? यहाँ चङ्गा ABCD मा दुई जोडी आसन्न भुजा AB = AD र BC = DC छन् ।

साथै लामो विकर्ण AC र छोटो विकर्ण BD छन् । साथै BP = PD र ∠APB = ∠APD = 90° पनि छन् ।

दुई जोडी आसन्न भुजा बराबर भएको चतुर्भुज चङ्गा हो । यसको लामो विकर्णले छोटो विकर्णलाई समकोण हुने गरी समद्विभाजन गर्छ । बराबर नहुने भुजाबिच बनेका कोण बराबर हुन्छन् ।

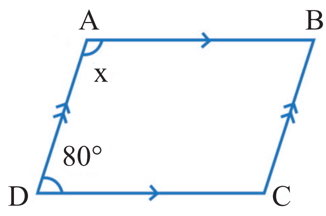
अभ्यासका लागि प्रश्न

1. समानान्तर चतुर्भुज, वर्ग र आयतका गुणको सूची तयार पार्नुहोस् ।

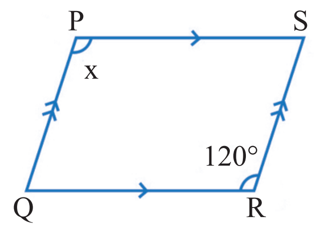
2. आयत र वर्गका फरक गुण के के छन् ? लेख्नुहोस् ।

3. दिइएका चित्रबाट x, y र z को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

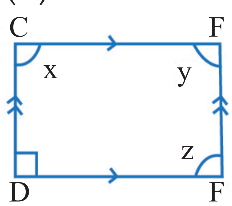
(क)



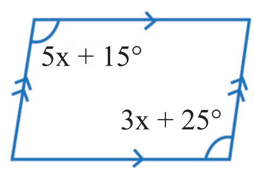
(ख)



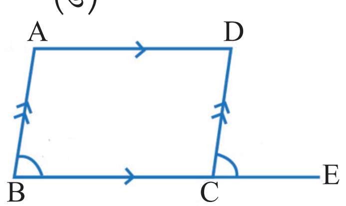
(ग)



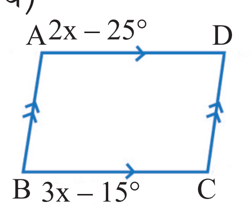
(घ)



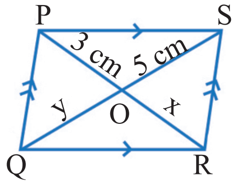
(ङ)



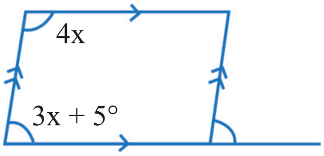
(च)



(छ)



(ज)



उत्तर

1. (क) $x = 100°$ (ख) $x = 120°$

(ग) $x = y = z = 90°$ (घ) $x = 5$

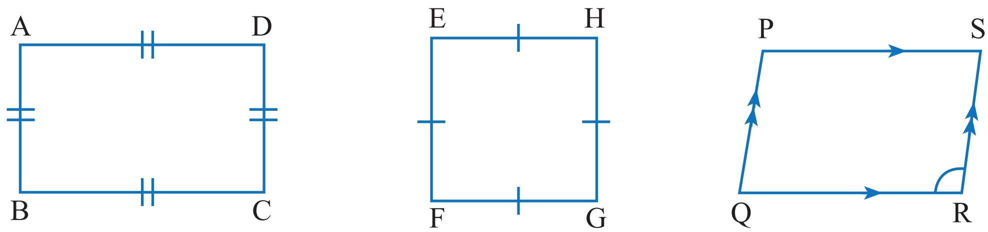
(ङ) $y = 50°$ (च) $x = 20°$

(छ) $x = 3$ cm, $y = 5$ cm (ज) $x = 25°, y = 80°$

पाठ 22 रचना
(Construction)

अध्ययन गरौँ

जरिना र जमिलले निम्नलिखित आकृति भएको चार्ट अगाडि राखेर यिनका विशेषताका बारेमा छलफल गरेँ ।



चित्र I सबै कोणहरू 90° छन् । सम्मुख भुजाको लम्बाइ बराबर छन् । त्यसैले यो आयत हो ।

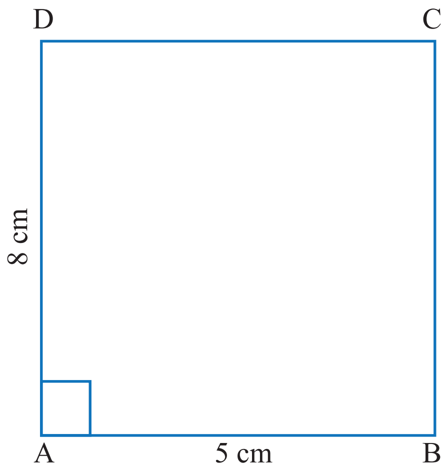
चित्र II मा सबै कोण 90° छन् साथै सबै भुजा पनि बराबर छन् । त्यसैले यो वर्ग हो ।

चित्र III मा सम्मुख भुजा एक अर्कासँग बराबर र समानान्तर छन् । त्यसैले यो समानान्तर चतुर्भुज हो । समानान्तर चतुर्भुजका क्रमागत भित्री कोणको योगफल 180° हुन्छ ।

उनीहरूले आयत, वर्ग र समानान्तर चतुर्भुजका विशेषतालाई ध्यानमा राखेर रचना गर्न सुरु गरे ।

(क) आयतको रचना (दुई आसन्न भुजा दिइएको अवस्थामा)

क्रियाकलाप 1

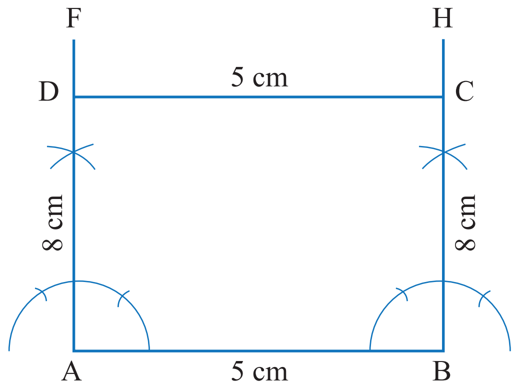


(अ) आसन्न भुजा छ से.मि.. र ड से.मि.. हुने गरी एउटा आयतको रचना गर्नुहोस् :

रचनाका चरण यसप्रकार छन् :

- दिइएको तथ्यको आधारमा खेस्रा चित्र बनाउनुहोस् ।
- आधार रेखामा छ से.मि.. हुने गरी AB ले जनाउनुहोस् ।

- विन्दु A मा कम्पासको सहायताले ढण्य डिग्रीको कोण खिच्नुहास् । (कोण FAB को नाप 90° छ ।)
- 8 से.मि. अर्धव्यास लिएर A बाट रेखा AF लाई काट्नुहोस् । काटिएको विन्दुलाई D ले जनाउनुहोस् ।
- विन्दु A मा कम्पासको सहायताले 90° डिग्रीको कोण खिच्नुहोस् । कोण FAB को नाप 90° छ ।
- 8 से.मि.. अर्धव्यास लिएर A बाट रेखा AF लाई काट्नुहोस् । काटिएको विन्दुलाई D ले जनाउनुहोस् ।
- विन्दु B मा कम्पासको सहायताले 90° डिग्रीको कोण खिच्नुहोस् । कोण HBA को मान 90° छ ।
- 8 से.मि. अर्धव्यास लिएर B बाट रेखा BH लाई काट्नुहोस् । काटिएको विन्दुलाई C ले जनाउनुहोस् ।
- अब, विन्दु C र D लाई रुलरको सहायताले जोड्नुहोस् ।
- अतः आयत ABCD को रचना भयो ।

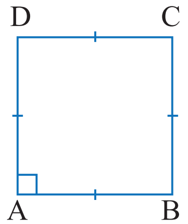


(ख) वर्गको रचना (एउटा भुजा दिएको अवस्थामा)

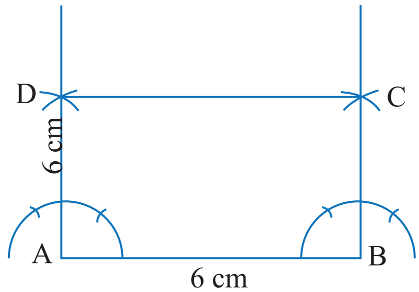
क्रियाकलाप 2

एउटा भुजा 6 से.मि. हुने गरी एउटा वर्गको रचना गर्नुहोस् ।

- दिइएको तथ्याङ्कको आधारमा खेस्रा चित्र बनाउनुहोस् ।



- आधार रेखामा 6 से.मि.. हुने गरी AB ले जनाउनुहोस् ।
- विन्दु A मा कम्पासको सहायताले 90° डिग्रीको कोण बनाउनुहोस् । कोण FAB को नाप 90° छ ।
- 6 से.मि.. अर्धव्यास लिएर A बाट रेखा AF लाई काट्नुहोस् । काटिएको विन्दुलाई D नाम दिनुहोस् ।
- विन्दु B मा 90° को कोण बनाउनुहोस् । कोण HBA को मान 90° छ ।
- 6 से.मि.. अर्धव्यास लिएर B बाट रेखा BH लाई काट्नुहोस् । काटिएको विन्दुलाई C नाम दिनुहोस् ।
- विन्दु C र D लाई रुलरको सहायताले जोड्नुहोस् ।
- अतः वर्ग ABCD को रचना भयो ।



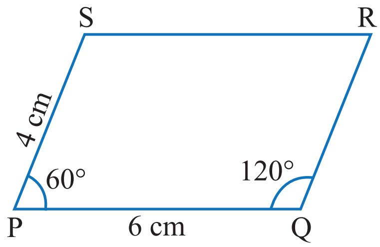
(ग) समानान्तर चतुर्भुजको रचना (आसन्न भुजाको नाप र बिचको कोणको नाप दिइएको अवस्थामा)

(अ) समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् :

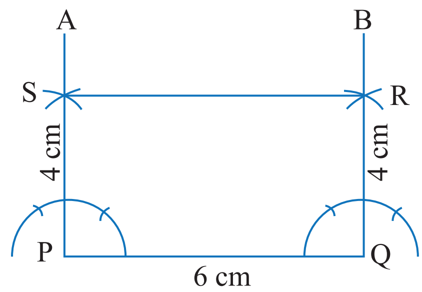
जसमा आसन्न भुजा 6 से.मि. र 4 से.मि. र तिनीहरूबिचको कोण 60° छ।

समाधान :

खेस्रा चित्र



- 6cm हुने गरी आधार रेखा खिच्नुहोस् र PQ नाम दिनुहोस्।
- विन्दु P बाट कम्पासको सहायताले 60° को कोण बनाउनुहोस्। कोण APQ को नाप 60° छ।
- 4 cm अर्धव्यास लिएर ए बाट रेखा AP लाई काट्नुहोस्। काटिएको विन्दुलाई S ले जनाउनुहोस्।
- विन्दु Q बाट कम्पासको सहायताले 120o को कोण बनाउनुहोस्। कोण BQP को नाप 120° छ।
- 4 cm अर्धव्यास लिएर त्त बाट रेखा BQ लाई काट्नुहोस्। काटिएको विन्दुलाई R ले जनाउनुहोस्।
- विन्दु R र S लाई रुलरको सहायताले जोड्नुहोस्।
- अतः समानान्तर चतुर्भुज PQRS को रचना भयो।



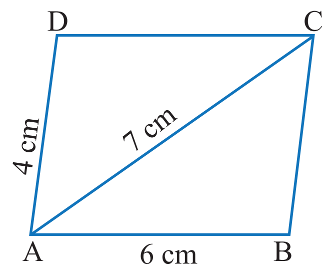
(आ) आसन्न भुजाको नाप र एउटा विकर्णको नाप दिइएको अवस्थामा सामानान्तर चतुर्भुजको रचना

क्रियाकलाप

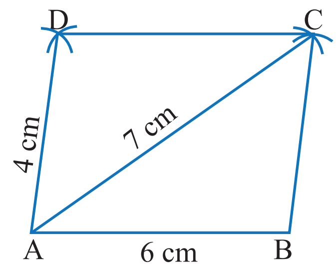
आसन्न भुजा 4 cm र 6 cm र एउटा विकर्णको लम्बाइ 7 cm गरी समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् ।

चरण

- खेस्रा चित्र बनाउनुहोस् ।



- 6cm हुने गरी आधार रेखा खिच्नुहोस् र AB नाम दिनुहोस् ।
- विन्दु A बाट 7 cm अर्धव्यास लिएर दायाँपट्टि र B बाट 4 cm अर्धव्यास लिएर माथि पट्टि चाप खिच्नुहोस् । काटिएको विन्दुलाई C ले जनाउनुहोस् ।
- विन्दु A र C तथा B र C लाई जोड्नुहोस् । यरी ΔABC बन्यो ।
- अब, विन्दु A बाट 4 cm अर्धव्यास लिएर माथिपट्टि र विन्दु C बाट 7 cm अर्धव्यास लिएर बाँयापट्टि चाप खिच्नुहोस् । काटिएको विन्दुलाई D ले जनाउनुहोस् ।
- विन्दु A र D तथा C र D लाई जोड्नुहोस् ।
- अब समानान्तर चतुर्भुज ABCD को रचना भयो ।

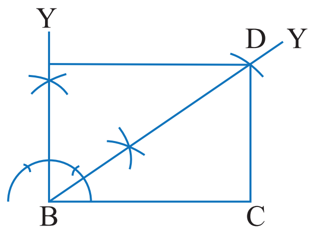


(इ) एउटा भुजा, एउटा बिकर्ण र त्यसले त्यही भुजासँग बनाएको कोण दिइएमा

प्रश्न : आधार रेखा BC = 8 cm, $\angle DBC = 30°$ र विकर्ण BD = 9cm भएको आयतको रचना गर्नुहोस् ।

चरण

- BC = 8cm को एउटा आधार रेखा खिच्नुहोस् ।
- कम्पासको प्रयोग गरी B विन्दु मा 30° को कोण खिच्नुहोस् र x सम्म लम्ब्याउनुहोस् ।
- कम्पासमा 9 cm लामो चाप लिएर BX मा काट्नुहोस् ।
- C र D लाई सरल रेखाले जोड्नुहोस् ।
- फेरि विन्दु B मा कम्पासको सहायताल 90° को कोण खिच्नुहोस् र BY रेखा तान्नुहोस् ।
- BY मा CD बराबरको चापले काट्नुहोस् र A नाम दिनुहोस् ।
- विन्दु A र D लाई जोड्नुहोस् ।
- आवश्यक समानान्तर चतुर्भुज ABCD तयार भयो ।



अभ्यासका लागि प्रश्न

1. तलका नापका आधारमा आयतको रचना गर्नुहोस् :

(क) आयत ABCD मा AB = 7 cm, AD = 4 cm

(ख) लम्बाइ 6 cm र चौडाइ 4 cm

(ग) आसन्न भुजाको नाप 8 cm र 5 cm

2. तलका नापका आधारमा वर्गको रचना गर्नुहोस् :

(क) एउटा भुजाको नाप 4 cm

(ख) लम्बाइ 4.5 cm

3. निम्नलिखित अवस्थाका समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् :

(क) आसन्न भुजा 3 cm र 5 cm आसन्न भुजाका बिचको कोण 45°

(ख) आसन्न भुजा 4 cm र 6 cm र विकर्ण 7 cm

(ग) एउटा भुजा 4 cm, विकर्ण 8 cm र विकर्णले 4 cm नाप भएको भुजासँग बनाएको कोण 60°

पाठ 23 बहुभुज (Polygon)

अध्ययन गरौँ :

दिइएका चित्रको अवलोकन गरी आकृतिको नाम के हो ? कतिओटा भुजाले बनेका छन् ? बन्द आकृति हुन् वा होइनन् ? विचार गर्नुहोस् ।

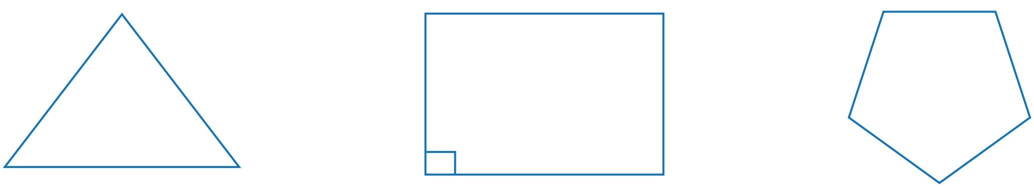
चित्रमा दिइएका सबै आकृति बन्द आकृति हुन् । तीनओटा भुजाले बनेको बन्द आकृतिलाई त्रिभुज भनिन्छ । त्यस्तै गरी चतुर्भुज, पञ्चभुज, षड्भुज आदि क्रमशः चारओटा, पाँचओटा, छओटा भुजाबाट बनेका बन्द आकृति हुन् ।

तीन वा तीनभन्दा बढी भुजाले बनेका ज्यामितीय बन्द आकृतिलाई बहुभुज भनिन्छ । माथिका सबै आकृति बहुभुज हुन् ।

अब, नियमित बहुभुज के हो ? भन्ने बारेमा हेरौँ :

23.1 नियमित बहुभुज (Regular Polygon):

दिइएका बहुभुजको अवलोकन गरी सोधिएका प्रश्नको उत्तर लेख्नुहोस् :



(क) के सबै चित्रमा भएमा बहुभुजका भुजा बराबर छन् ?

(ख) के सबै चित्रमा भएका बहुभुजका कोण बराबर छन् ? प्रोट्याक्टरले नापेर लेख्नुहोस् ।

सबै भुजा र भित्री कोण बराबर भएको बहुभुजलाई नियमित बहुभुज भनिन्छ ।

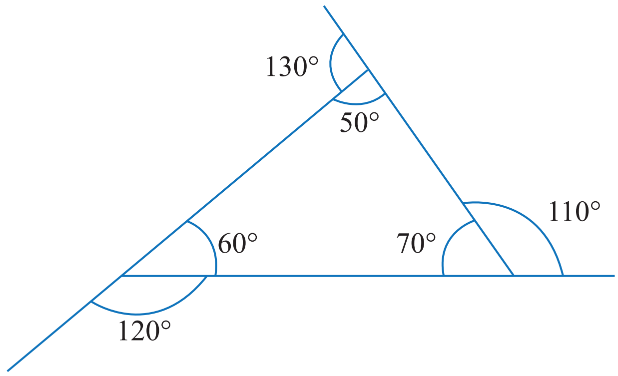
23.1.1 नियमित बहुभुजका भित्री कोणका नाप (Measurement of Interior angles of regular polygon)

हरिमाया र जसवीरले गणितका हिसाबको अभ्यास सँगै बसेर गर्ने गर्छन् । जसबिर ज्यामितिका समस्या हल गर्न अलमलिने गर्छन् । उसले आफ्नो कापीमा त्रिभुजको चित्र कोर्दै हरिमायालाई केही जिज्ञासा राख्छन् ।

जसवीर : (त्रिभुजको चित्र देखाउँदै) यो त्रिभुजको भित्री र बाहिरी कोण कति कति हुन्छन् ?

हरिमाया : खै, त्यो चित्र देऊ त !

जसवीरले बनाएको त्रिभुजका छेउका विन्दुबाट भुजा बाहिरतिर लम्बाइ प्रोट्रेक्टरले कोण एक एक गरी नापेर देखाउँदा चित्र र नाप यस्तो थियो ।



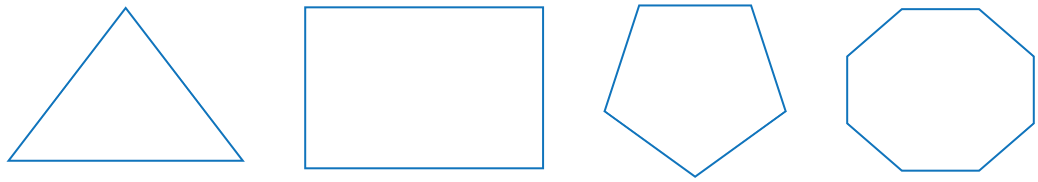
जसवीर : खै कसरी नाप्यौ ? ए ! त्रिभुजको भित्रीकोण र त्यो कोणसँगको बाहिरी आसन्नकोण जोड्दा 180° हुँदो रहेछ ।

हरिमाया : हो नि ! अब भने म सबै भुजा बराबर भएका आकृतिको भित्री कोण र बाहिरी कोण कति कति हुन्छन् ? तालिका बनाउँछु है ।

जसवीर : सबै भुजा बराबर भएका आकृति भनेको नियमित बहुभुज हैन त ?

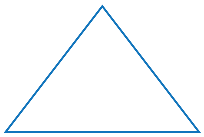
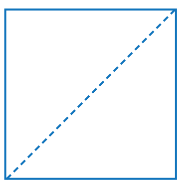
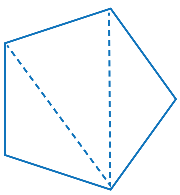
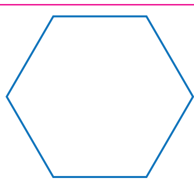
हरिमाया : हो त ! नियमित बहुभुज भनेका सबै भुजा बराबर हुने गरी बनाएका त्रिभुज, चतुभुज, पञ्चभुज र षड्भुज हुन् ।

मैले बराबर नापका बाँसका सिन्का ल्याएको छु । यसको प्रयोग गरेर विभिन्न आकार बनाऔँ ।



तपाईँ पनि बराबर नाप भएका सिधा सिन्काका टुक्रा अथवा सलाइका काँटीबाट नियमित बहुभुज बनाउनुहोस् ।

अब, हरिमाया र जसविरले बनाएका तालिका हेरौँ :

	बहुभुज	**भुजाको सङ्ख्या**	**त्रिभुजको सङ्ख्या**	**भित्री कोणको जोड**
त्रिभुज		3	1 = (3 – 2)	180° = 180° × (3 – 2)
चतुर्भुज		4	2 = (4 – 2)	360° = 180° × (4 – 2)
पञ्चभुज		5	3 = (5 – 2)	540° = 180° × (5 – 2)
षड्भुज		6	4 = (6 – 2)	
n भुजा भएको बहुभुज		N	n – 2	180° × (n – 2)

माथिको तालिकाको आधारमा बहुभुजाबाट बन्न सक्ने त्रिभुजका सङ्ख्या र त्रिभुजका भित्री कोणको योगफल (180°) का आधारमा बहुभुजका भित्री कोणको योगफल निकाल्न सकिन्छ ।

यसलाई सामान्यीकरण गर्दा,

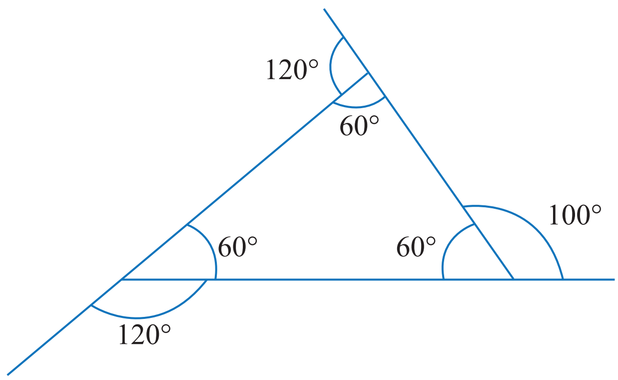
बहुभुजका भित्री कोणको योगफल = $180 \times (n - 2)$ भयो ।

एक भित्री कोणको नाप = $\frac{n-2}{n} \times 180°$ हुन्छ ।

23.2 नियमित बहुभुजको बाहिरी कोणको नाप (Measurment of exterior angles of regular polygon)

क्रियाकलाप

- एउटा नियमित त्रिभुज बनाउनुहोस् ।
- त्रिभुजका छेउका विन्दुबाट भुजा बाहिरतिर लम्बाएर बाहिरी कोण बनाउनुहोस् ।
- बाहिरी कोण कसरी निकाल्न सकिएला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।



हामीलाई थाहा छ,

भित्री कोण + बाहिरी कोण =180°

or, बाहिरी कोण + 180o – भित्री कोण

or, बाहिरी कोण = $180° - \frac{(n-2)180°}{n}$

or, बाहिरी कोण = $\frac{180°n - 180°n + 360°}{n}$

∴ बाहिरी कोण = $\frac{360°}{n}$ हुन्छ ।

∴ कुनै पनि नियमित बहुभुजको बाहिरी कोणको नाप पत्ता लगाउन, बाहिरी कोण = $\frac{360°}{n}$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

भुजाको सङ्ख्या 6 भएको नियमित बहुभुजको भित्री कोणको योगफल कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ, बहुभुजको भुजाको सङ्ख्या (n) = छ

बहुभुजको भित्री कोणको योगफल ?

हामीलाई थाहा छ,

भित्री कोणको योगफल $= (n - 2) \times 180°$

$= (6 - 2) \times 180°$

$= 4 \times 180°$

$= 720°$

उदाहरण 2

भुजाको सङ्ख्या 5 भएको नियमित बहुभुजको बाहिरी कोणको नाप कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, बहुभुजको भुजाको सङ्ख्या (n) = 6

बहुभुजको बाहिरी कोणको नाप = ?

हामीलाई थाहा छ,

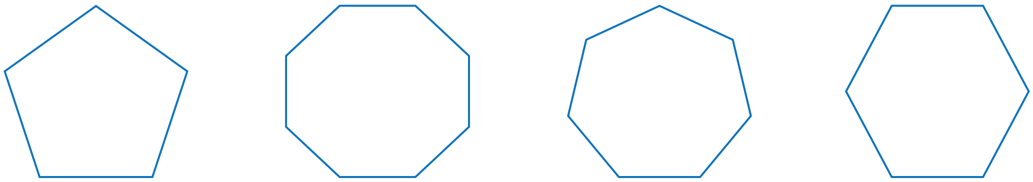
बाहिरी कोणको नाप $= \dfrac{360°}{n}$

$= \dfrac{360°}{5}$

$= 72°$

1. दिइएका बहुभुजका भुजाको सङ्ख्या र बहुभुजको नाम लेख्नुहोस् :

(क) (ख) (ग) (घ)



2. तलका नियमित बहुभुजका भुजा सङ्ख्या (n) दिइएको अवस्थामा भित्री कोणको नाप निकाल्नुहोस् :

(क) $n = 7$ (ख) $n = 8$ (ग) $n = 10$

3. तलका नियमित बहुभुजका भुजा सङ्ख्या (n) दिइएको अवस्थामा बाहिरी कोणको नाप निकाल्नुहोस् :

(क) $n = 5$ (ख) $n = 8$ (ग) $n = 12$

4. तलका बहुभुजका भुजा सङ्ख्या (n) दिइएको अवस्थामा भित्री कोणको योग निकाल्नुहोस् ।

(क) $n = 5$ (ख) $n = 8$ (ग) $n = 10$ (घ) $n = 12$

5. तलका बहुभुजका भुजा सङ्ख्या (n) दिइएको अवस्थामा बाहिरी कोणको योग निकाल्नुहोस् ।

(क) $n = 6$ (ख) $n = 9$ (ग) $n = 10$ (घ) $n = 12$

पाठ 24

अनुरूपता
(Congruencey)

परिचय

तल दिइएका आकृतिमध्ये कुन कुन उस्तै आकारका र बराबर नापका छन् ? छुट्याउनुहोस् ।

चित्र I

चित्र II

चित्र III

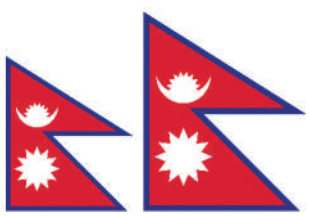
माथि दिइएका सबै आकृति उस्तै छन् तर बराबर नापका छैनन् । चित्र I र II का आकृति उस्तै छन् तर बराबर छैनन् । चित्र II र III का आकृति उस्तै र बराबर नापका छन् । यसरी उस्तै आकार र बराबर नापका आकृतिलाई अनुरूप आकृति भनिन्छ ।

उस्तै आकार र बराबर नाप भएका आकृतिलाई अनुरूप आकृति भनिन्छ ।

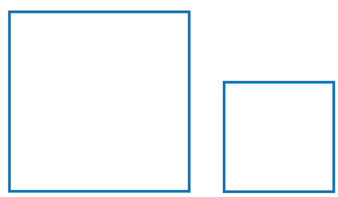
क्रियाकलाप 1

तल दिइएका कुन कुन जोडी आकृति अनुरूप छन् ? लेख्नुहोस् ।

चित्र I



चित्र II

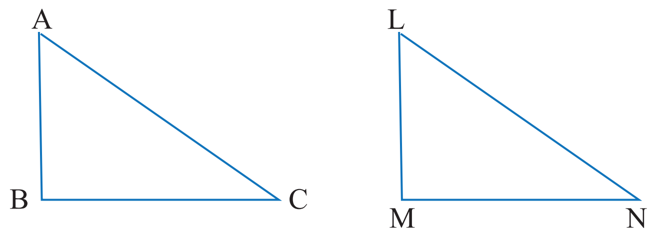


चित्र III

24.1 अनुरूप त्रिभुज (Congruent Triangles)

क्रियाकलाप 2

- तपाईंको ज्यामिति बाकसमा भएको सेटस्क्वायर लिनुहोस् ।
- सेटस्क्वायरलाई कापीमा राखेर बाहिरी घेराको ट्रेसिङ् गरी दुईओटा त्रिभुज बनाउनुहोस् ।
- दुवै त्रिभुजको फरक फरक नाम दिनुहोस् ।



- कैंचीको सहायताले दुवै त्रिभुजलाई काट्नुहोस् ।
- एउटा त्रिभुज माथि अर्को त्रिभुज खप्टयाएर दाँज्नुहोस् र तलको तालिका भर्नुहोस् :

Δ LMN को,

विन्दु L माथि त्रिभुज ABC को बिन्द .... छ।

विन्दु M माथि त्रिभुज ABC को विन्दु .... छ।

विन्दु N माथि त्रिभुज ABC को विन्दु ...... छ।

त्यस्तै गरी त्रिभुज LMN को,

भुजा LM माथि त्रिभुज ABC को भुजा .... छ।

भुजा MN माथि त्रिभुज ABC को भुजा .... छ।

- भुजा LN माथि त्रिभुज ABC को भुजा .... छ।
- त्रिभुज ABC र त्रिभुज LMN कस्ता त्रिभुज हुन् ? निष्कर्ष लेख्नुहोस् ।

चित्रमा, ΔABC र ΔLMN उस्तै आकार र बराबर नापका छन् । त्यसैले ΔABC र ΔLMN अनुरूप त्रिभुज हुन् ।

माथिको चित्रबाट,

$$AB = LM \quad \angle A = \angle L$$

$BC = MN \quad \angle B = \angle M$

$AC = LN \quad \angle C = \angle N$ पाइयो ।

यसरी हेर्दा अनुरूप त्रिभुजका भुजा र कोण एकअर्कासँग अलग अलग रूपमा बराबर हुँदा रहेछन् ।

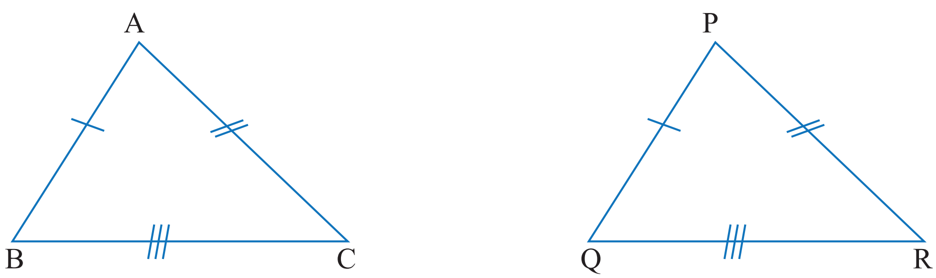
यहाँ, AB र LM, BC र MN, AC र LN सङ्गति भुजा हुन् भने $\angle A$ र $\angle M$, $\angle C$ र $\angle N$ सङ्गति कोण हुन् ।

उस्तै आकार र बराबर नाप भएका दुई त्रिभुजलाई अनुरूप त्रिभुज भनिन्छ । अनुरूप त्रिभुजका सङ्गति कोण र सङ्गति भुजा बराबर हुन्छन् । यदि दुई त्रिभुज ΔABC र ΔLMN अनुरूप भए सङ्केतमा $\Delta ABC \cong \Delta LMN$ लेखिन्छ ।

24.1.1 अनुरूप त्रिभुजको परीक्षण (Test of Congruency of Triangles)

परीक्षण I : (भु.भु.भु. तथ्यको परीक्षण)

विधिः सर्वप्रथम फरक फरक नापका भुजा भएको एउटा त्रिभुज ABC बनाउनुहोस् :



- अब AB, BC र AC सँग क्रमशः बराबर हुने गरी भुजा PQ, QR र PR भएको ΔPQR बनाउनुहोस् ।
- चाँदको प्रयोगबाट दुवै त्रिभुजका प्रत्येक कोणलाई नाप्नुहोस् । के निष्कर्ष आउँछ ? लेख्नुहोस् ।

निष्कर्ष :

ΔABC का तीनओटा भुजा र ΔPQR का तीनओटा भुजासँग अलग अलग बराबर भएको अवस्थामा सङ्गति कोणको नाप पनि बराबर हुन्छ । त्यसैले ΔABC र ΔPQR अनुरूप हुन्छन् ।

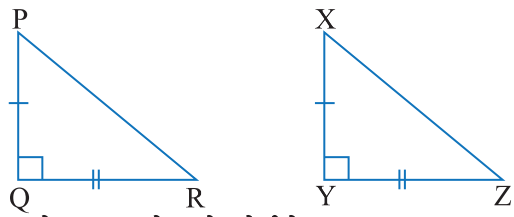
यदि एउटा त्रिभुजका तीनओटा भुजा अर्को त्रिभुजका तीनओटा भुजासँग अलग अलग आपसमा बराबर छन् भने उक्त दुई त्रिभुज अनुरूप हुन्छन् । यसलाई (भुजा, भुजा, भुजा) वा छोटकरीमा भु.भु.भु. (s.s.s) तथ्य भनिन्छ ।

परीक्षण IIM (भु.को.भु तथ्य को परीक्षण)

चित्रमा, ΔPQR र ΔXYZ मा,

$PQ = XY$, $\angle PQR = \angle XYZ$ र

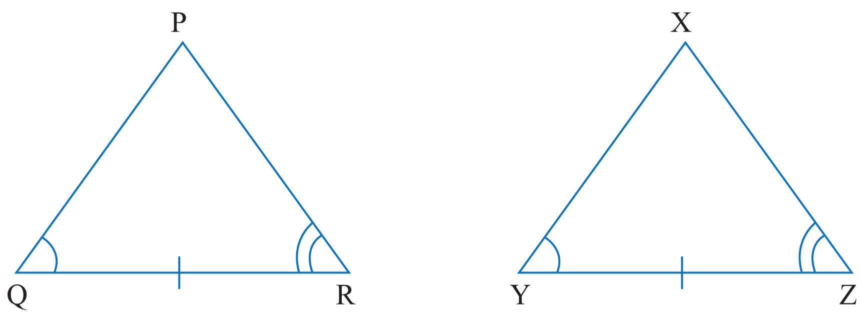
$QR = YZ$ दिइएको छ ।



- दुवै त्रिभुजबाट बाँकी भागको नाप रुलर र प्रोट्याक्टरले नापेर हेर्नुहोस् ।
- के बाँकी सङ्गति भुजा र सङ्गति कोण बराबर आउँछ ?
- पक्कै पनि तपाईंले नाप्दा बराबर आयो होला, हैन ?

एउटा त्रिभुजको एउटा कोण र त्यो कोण बनाउने भुजा अर्को त्रिभुजका एउटा कोण र त्यो कोण बनाउने भुजा अलग अलग बराबर छन् भने ती त्रिभुज अनुरूप हुन्छन् । त्यसैले, $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ छ ।

परीक्षण III : को. भु. को तथ्यको परीक्षण

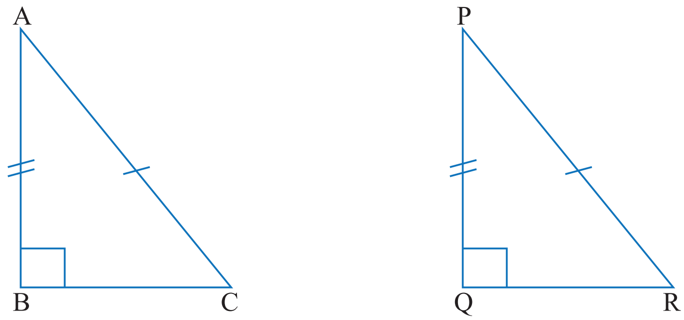


माथिको चित्रमा, $\angle Q = \angle Y$, भुजा QR = भुजा YZ र $\angle P = \angle Z$ भए $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ हुन्छ । किन होला ? यी दुई त्रिभुजका बाँकी भाग नापेर हेर्ने हो भने सबै सङ्गत भुजा तथा कोण अलगअलग बराबर हुन्छन् । तपाईं आफैं नापेर हेर्नुहोस् ।

त्यसैले,

को.भु.को. एउटा त्रिभुजका दुईओटा कोण र त्यसमा परेको भुजा अर्को त्रिभुजका दुईओटा कोण र त्यसमा परेको भुजासँग क्रमशः अलग अलग बराबर छन् भने ती दुई त्रिभुज को.को.भु.को. तथ्यबाट अनुरूप हुन्छन् ।

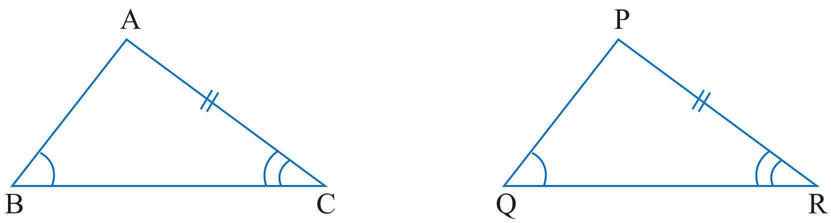
परीक्षण IV : स.क.भु. तथ्यको परीक्षण



माथि दुईओटा समकोण त्रिभुज ABV र PQR दिइएको छ । जसमा कर्ण AC = कर्ण PR, भुजा AB = भुजा PQ र $\angle B = \angle Q$ छ । यी दुई त्रिभुजका बाँकी सङ्गत भाग नापेर हेर्ने हो भनी निष्कर्षमा यी दुवै अनुरूप भएको देखिन्छ । त्यसैले,

स.क.भु. : एउटा समकोण त्रिभुजको कर्ण र एउटा भुजा अर्को समकोण त्रिभुजको कर्ण र एउटा भुजासँग क्रमशः अलग अलग बराबर छन् भने ती त्रिभुज अनुरूप हुन्छन् ।

परीक्षण V : भु.को.को. तथ्यको परीक्षण



माथिको चित्रमा भुजा AB = भुजा PR, $\angle B = \angle Q$ र $\angle C = \angle R$ भए $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ हुन्छ । किन होला ? यी दुई त्रिभुजका बाँकी सङ्गत भाग नापेर हेर्ने हो भने निष्कर्षमा यी दुवै अनुरूप भएको देखिन्छ ।

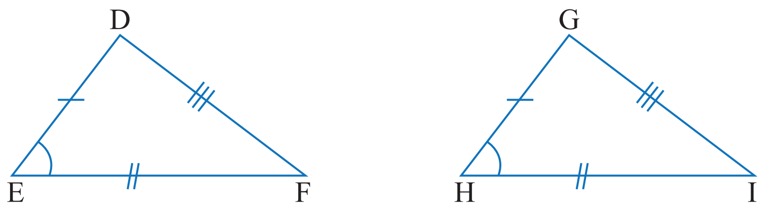
भु.को.को : एउटा त्रिभुजको एउटा भुजा त्यसमा परेको एउटा कोण र त्यसको सम्मुखकोण अर्को त्रिभुजको एउटा भुजा, त्यसमा परेका एउटा कोण र त्यसको सम्मुख कोण क्रमशः अलग अलग बराबर छन् भने ती दुई त्रिभुज अनुरूप हुन्छन् ।

उदाहरण 1

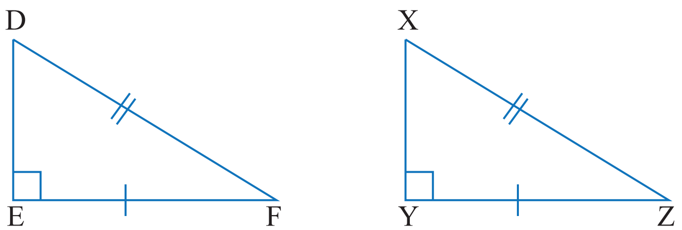
तल दिइएका जोडी त्रिभुज कुन तथ्यको आधारमा अनुरूप हुन्छन् ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।

समाधान

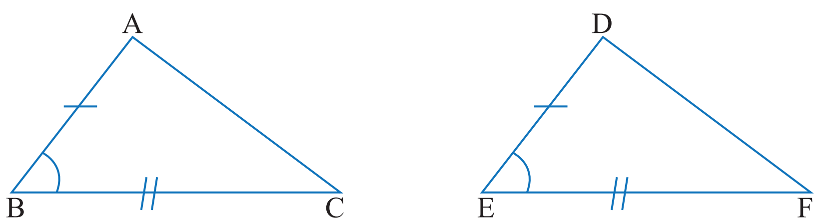
(क)



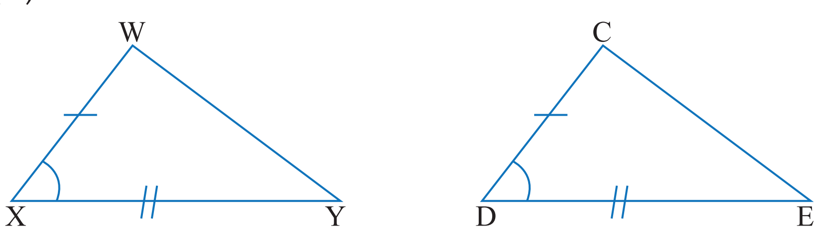
(ख)



(ग)



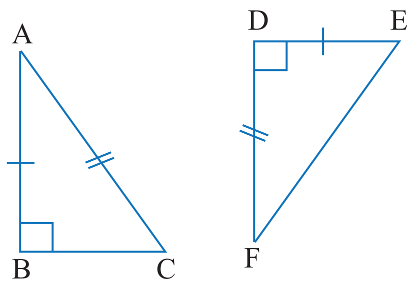
(घ)



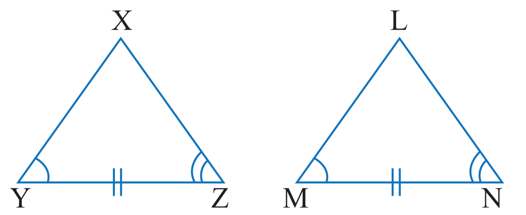
अभ्यासका लागि प्रश्न

1. तल चित्रमा दिइएका जोडी त्रिभुज ΔABC र ΔDEF कुन तथ्यका आधारमा अनुरूप हुन्छन् ? लेख्नुहोस् ।

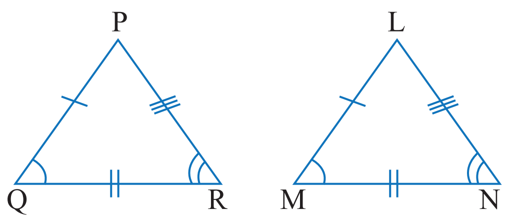
(क)



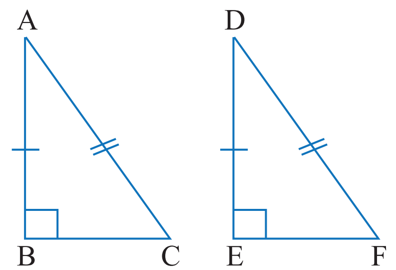
(ख)



(ग)



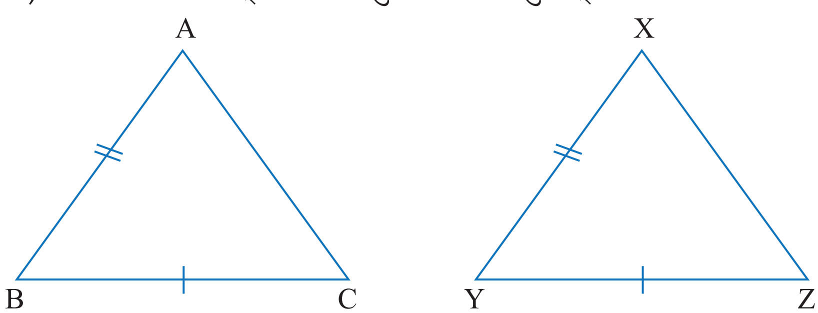
घ)



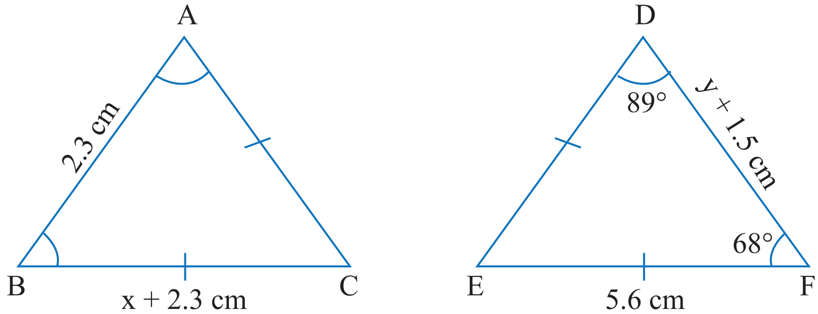
1. चित्रमा $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ छन् भने

(क) AB को सङ्गत भुजा कुन छ ?

(ख) $\angle BAC$ को सङ्गत कोण कुन हो ? लेख्नुहोस् ।



1. **दिइएको चित्रमा $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ भए x र y को मान पत्ता लगाऊ :**

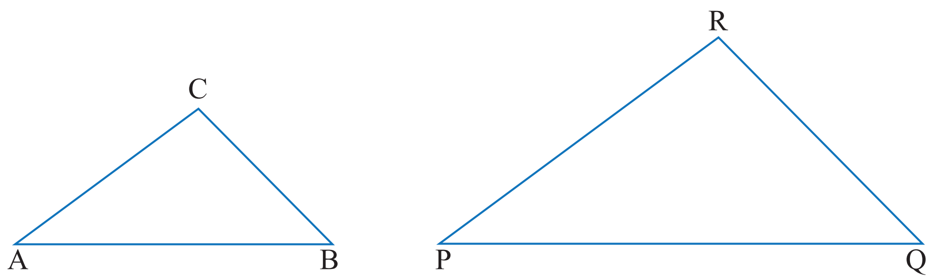


उत्तर

1.	(क) स.क.भु.	(ख) को.भु.को	(ग) भु.भु.भु.	(घ) स.क.भु.
2.	(क) xy	(ख) $\angle YXZ$		
3.	(क) x = 3.3 cm, y = 2 cm		(ख) $\angle YXZ$	

पाठ 25 समरूप त्रिभुज
(Similar triangles)

परिचय :



एउटा फोटोकपी पेपर लिनुहोस् र त्यसमा फरक फरक नाप भएका दुईओटा रेखाखण्ड AB र एत्त खिच्नुहोस् ।

अब चित्रमा देखाएको जस्तै गरी विन्दु A र P मा साथै B र Q मा समान हुने गरी निश्चित नापका कोण खिच्नुहोस् र कोणका बाहु काटिएका विन्दुलाई क्रमश : C र R नामकरण गर्नुहोस् । कस्तो आकृति बन्यो ? के दुवै आकृति समान किसिमका छन्, छलफल गर्नुहोस् । अब तपाईँले बनाएका ती दुई त्रिभुजलाई काटेर निकाल्नुहोस् र ती त्रिभुजलाई एक अर्कामाथि खप्टाई निम्नलिखित प्रश्नमा विचार गर्नुहोस् :

(क) के दुवै त्रिभुजको आकार एकै किसिमका छन् ?

(ख) त्रिभुज ABC र त्रिभुज PQR मा कुन कुन कोण आपसमा बराबर छन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) के AB र PQ, BC र QR तथा AC र PR का लम्बाइ बराबर छन् ?

(घ) दुवै त्रिभुजका सबै भुजाका नाप लिनुहोस् ।

(ङ) त्रिभुज ABC र त्रिभुज PQR मा बराबर कोणका सम्मुख भुजाको अनुपात निकाल्नुहोस् ।

(च) बराबर कोणका सम्मुख भुजाको अनुपातको सम्बन्ध कस्तो देखिन्छ ?

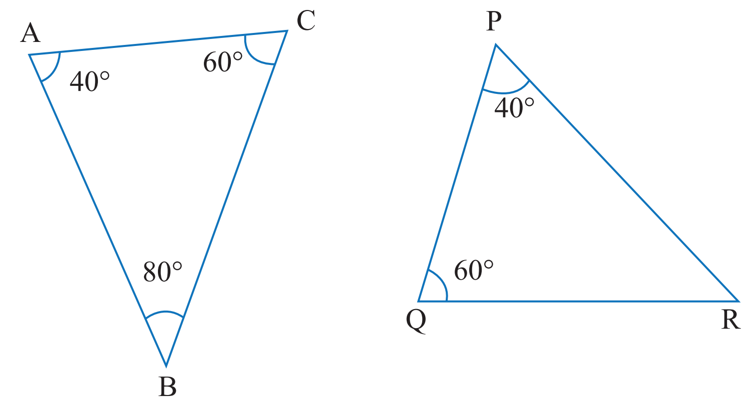
माथि दिइएका ΔABC र ΔPQR समरूप त्रिभुज हुन् । जसमा $\angle BAC = \angle QPR$, $\angle ABC = \angle PQR$ र $\angle ACB = \angle PRQ$ हुनुका साथै QR = PR= PQ पनि छन् । यहाँ बराबर कोण A र P, B र Q तथा C र R सङ्गति कोण हुन् भने बराबर कोणका सम्मुख भुजा BC र QR, AC र PR तथा AB र PQ सङ्गति भुजा हुन् । समरूप त्रिभुजमा बराबर कोणलाई सङ्गति कोण र बराबर कोणको सम्मुख भुजालाई सङ्गति भुजा भनिन्छ । दुई त्रिभुजका सङ्गति कोण

बराबर र सङ्गति भुजा समानुपातमा भएमा ती दुई त्रिभुजलाई समरूप त्रिभुज भनिन्छ ।

समरूप त्रिभुज ABC र PQR लाई सङ्केतमा ABC ~ PQR लेखिन्छ ।

उदाहरण 1

दिइएको $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ छन् भने P



(क) सङ्गति कोण तथा भुजाका नाम लेख्नुहोस् ।

(ख) $\angle PRQ$ को नाप पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।

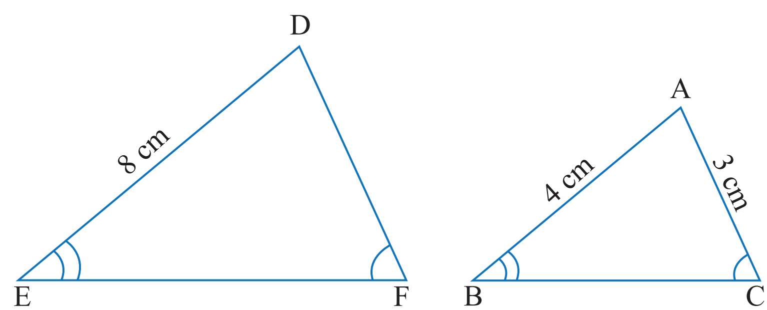
समाधान : यहाँ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ छ ।

(क) त्यसैले बराबर कोण A र P, C र Q तथा B र R सङ्गति कोण हुन् भने बराबर कोणका सम्मुख भुजा BC र QR, AC र PQ तथा AB र PR सङ्गति भुजा हुन् ।

$\therefore \angle ABC = \angle PRQ = 80°$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

यदि दिइएको त्रिभुज ABC ~ DEF भए DF को नाप पत्ता लगाउनुहोस् :



समाधान

यहाँ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ र $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$

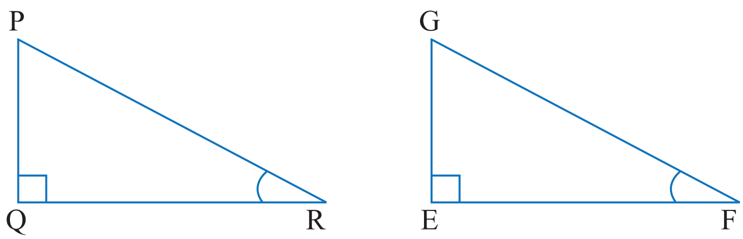
$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ [$\therefore$ समरूप त्रिभुजका सङ्गति भुजाको अनुपात बराबर हुने भएकाले]

$\frac{4}{8} = \frac{3}{DF}$ $\therefore DF = 6$

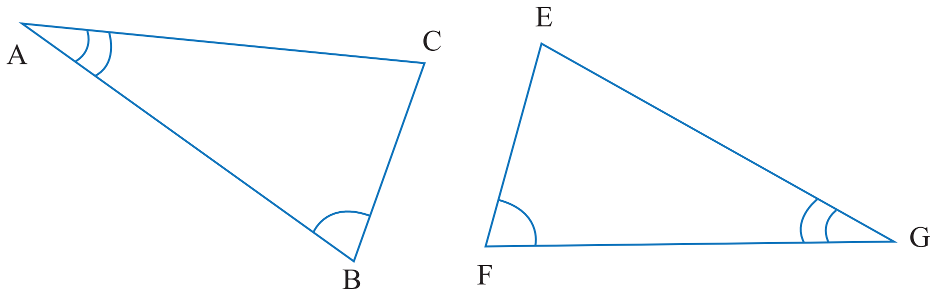
अभ्यासका लागि प्रश्न

1. दिइएका जोडी त्रिभुज समरूप छन् भने तिनका सङ्गति कोण तथा भुजाको नाम लेख्नुहोस् :

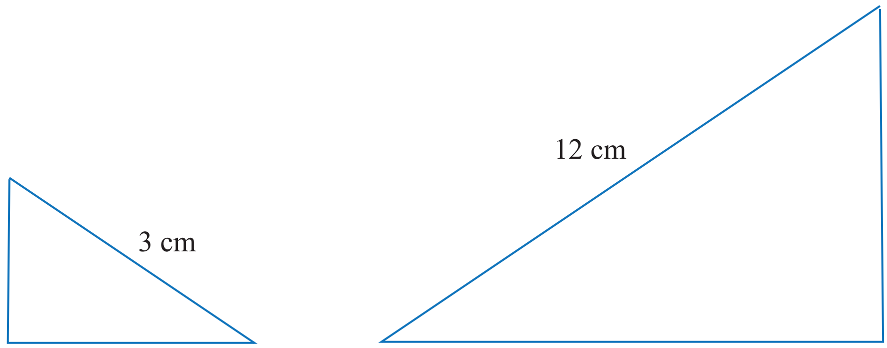
(क)



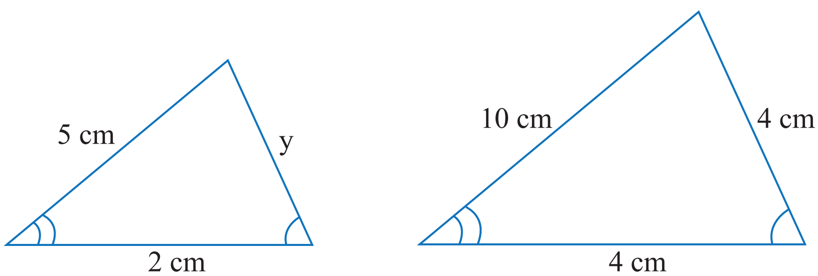
(ख)



2. **दिइएका समरूप त्रिभुजको सङ्गति भुजाको अनुपात कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।**



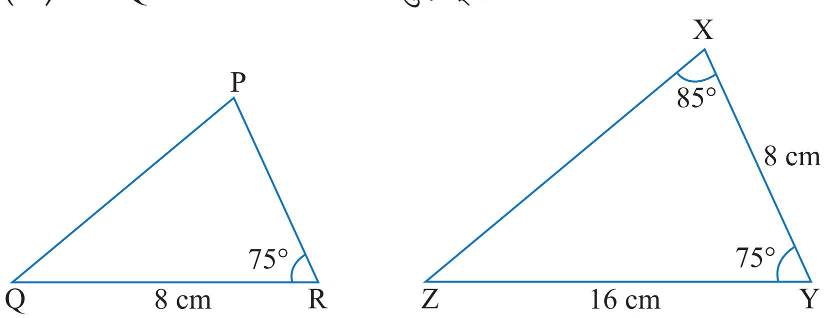
3. **दिइएका त्रिभुज समरूप छन् भने थाहा नभएको भुजाको मान पत्ता लगाउनुहोस् :**



4. **सँगैको $\Delta PQR \sim \Delta XYZ$ चित्रमा छन् भने तलका प्रश्नको उत्तर लेख्नुहोस् :**

(क) सङ्गति भुजाको अनुपात निकाल्नुहोस् ।

(ख) $\angle PQR$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।



उत्तर

1. (क) xy (ख) $\angle XYZ$ (ग) $\frac{PQ}{GQ} = \frac{QR}{EF} = \frac{PR}{GG}$
2. (क) 1:4 (ख) $\angle YXZ$
3. $Y = 8$ cm
4. (क) 1:2 (ख) $\angle PQR = 85°$

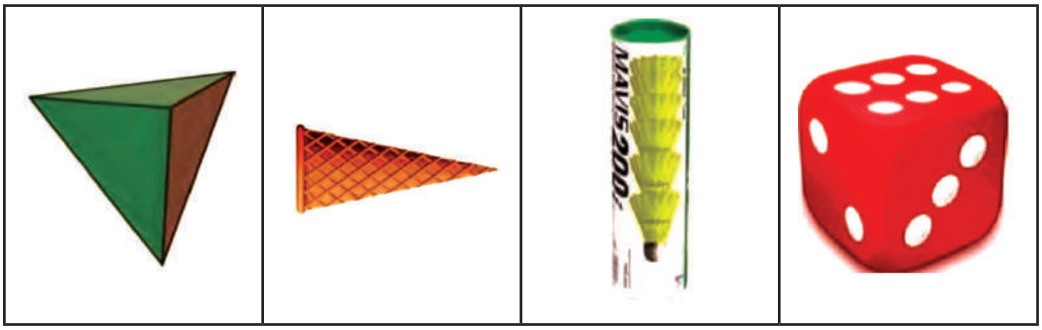
पाठ 26

ठोस वस्तु
(Solids)

तल ठोस वस्तुका चित्र दिइएको छ । उक्त ठोसवस्तुको अवलोकन गरी सोधिएका प्रश्नमा विचार गर्नुहोस् :

(क) तपाईँले चित्रको जस्तो आकृति वा ठोस वस्तु देख्नुभएको छ ? देख्नुभएको छ भने कहाँ कहाँ देख्नुभएको छ ?

(ख) दिइएका आकृतिमा कस्ता कस्ता सतह छन् ? कतिओटा सतह मिलेर बनेका छन् ?



अब, हामी तपाईँले मथि देख्नुभएका ठोस आकृति के के हुन् र यी ठोस वस्तुलाई गणितीय भाषामा कस्तो आकार भनिन्छ ? भन्ने बारेमा अध्ययन गरौँ :

26.1 त्रिभुजाकार प्रिज्म (Triangular prism)

अनिताले प्रधानाध्यापकको टेबलमा राखिएको नाम प्लेट हेरिरहेकी हुन्छिन् । त्यत्तिकैमा सर आइपुग्नुहुन्छ । प्रधानाध्यापक सर र अनिता बिचको संवादलाई तल प्रस्तुत गरिएको छ ।

अनिता : नमस्कार सर !

सर : नमस्कार, नमस्कार ! अनि अनिता तिमी यहाँ के गरिरहेकी छौ ?

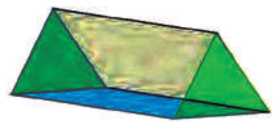
अनिता : सर, मैले हजुरको टेबलमा राखिएको यो नाम प्लेटलाई गणितीय भाषामा कस्तो आकार भनिन्छ ? भन्ने सोच्दै छु ।

सर : ए ! ल हेरेर भन है त ?

(क) यसमा कतिओटा समतलीय सतह छन् ? ती कस्ता कस्ता आकारका छन् ?

अनिता : यसमा दुईओटा त्रिभुज र तीनओटा आयतकार सतह छन् । हैन त सर ?

सर : हो नि अनिता, हेर त, आधारमा भएका दुईओटा त्रिभुज एक आपसमा अनुरूप छन् ।

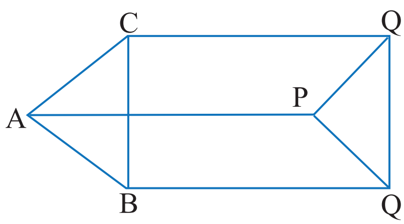


अनिता : ए ! दुवै त्रिभुज बराबर रहेछन् है सर ।

सर : हो नि ! यसरी आधारमा दुईओटा अनुरूप त्रिभुजकार सतह र तीनओटा आयतहरू मिलेर बनेको बन्द ठोस आकृतिलाई त्रिभुजाकार प्रिज्म भनिन्छ । बुझ्यौ त ?

अनिता : बुँझें, धन्यवाद सर ।

समतलीय सतहले बनेको ठोसवस्तु प्रिज्म हो । यसमा त्रिभुजकार र आयतकार गरी दुई प्रकारका सतह छन् । माथिल्लो सतह र तल्लो सतहमा भएका त्रिभुज अनुरूप छन् । यिनीहरूलाई प्रिज्मको आधार भनिन्छ । आधार बाहेकको सतहहरूलाई छड्के सतह भनिन्छ । यसरी प्रिज्मको आधारमा त्रिभुज भएमा त्यस्तो ठोस वस्तुलाई त्रिभुजकार प्रिज्म भनिन्छ ।



चित्रमा, ABC र PQR त्रिभुज हुन् भने APRC, APQB, BCRQ तीनओटा आयत हुन् । यी 5 ओटा सतह मिलेर बनेको ठोस आकृति नै त्रिभुजाकार प्रिज्म हो ।

26.2 पिरामिड (Pyramid)

तल ठोसवस्तुको आकृति दिइएको छ । अवलोकन गर्नुहोस् र सोधिएका प्रश्नमा विचार गर्नुहोस् :

(क) तपाईँले चित्रको जस्तो आकृति वा ठोसवस्तु देख्नुभएको छ ? देख्नुभएको छ भने कहाँ कहाँ देख्नुभएको छ ?

(ख) माथिका आकृतिमा कस्ता कस्ता सतह छन् ? कतिओटा सतह मिलेर बनेका छन् ?

दिइएका आकृति पिरामिडका हुन् । दुवै पिरामिडमा आधारका सतह बहुभुज छन् । पिरामिडमा आधारबाहेक त्रिभुजाकार छड्के सतह (Lateral Surface) छन् । छड्के सतहको एउटा साझा शीर्षविन्दु छ । साथै ठाडो उचाइ आधारको सतहसँग लम्ब पनि छ ।

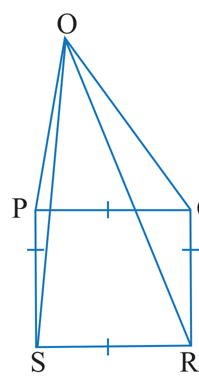
> आधार बहुभुज भएको र छड्के सतहको एउटा साझा शीर्षविन्दु भएको त्रिआयामिक ठोसवस्तुलाई पिरामिड भनिन्छ । पिरामिडको नाम यसको आधारको बहुभुजको आकारअनुसार हुन्छ । जस्तै : पिरामिडको आधार त्रिभुज भएमा त्रिभुजाकार पिरामिड, पिरामिडको आधार आयत भएमा आयतकार पिरामिड र पिरामिडको आधार वर्ग भएमा वर्गाकार पिरामिड भनिन्छ ।

उदाहरण 1

चित्रमा,

वर्ग आकारको आधार भएको पिरामिड देखाइएको छ । जहाँ, आधारमा वर्ग PQRS छ र यसका अन्य सतहहरू त्रिभुज छन् र तिनी यसप्रकार छन् :

$\Delta POS, \Delta SOR, \Delta POQ$ र ΔPOQ



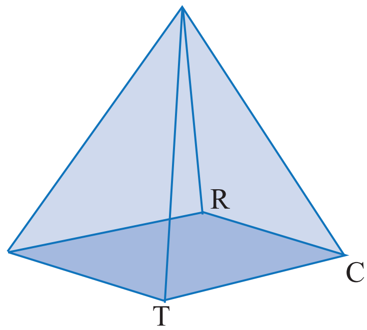
अभ्यासका लागि प्रश्न

1 तल चित्रमा त्रिभुजाकार आधार भएका प्रिज्म दिइएको छ । उक्त चित्रको अवलोकन गरी सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(क) त्रिभुजाकार आधार भएका प्रिज्मका सबै सतहको नाम लेख्नुहोस् ।

(ख) त्रिभुजाकार आधार भएका प्रिज्ममा कुन कुन सतह अनुरूप छन् ?

(ग) त्रिभुजाकार आधार भएका प्रिज्ममा किनारा, सतह त्रिभुजाकार आधार भएको र शीर्षकोणको सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।



2. तल चित्रमा आयताकार आधार भएका पिरामिड दिइएको छ । उक्त चित्रको अवलोकन गरी तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(क) त्रिभुजाकार आधार भएका प्रिज्म र आयताकार आधार भएका पिरामिडका सबै सतहको नाम लेख्नुहोस् ।

(ख) त्रिभुजाकार आधार भएका प्रिज्म र आयताकार आधार भएका पिरामिडमा कुन आयताकार आधार भएको कुन सतह अनुरूप छन् ?

(ग) त्रिभुजाकार आधार भएका प्रिज्म र आयताकार आधार भएका पिरामिडमा किनारा, सतह र शीर्षकोणको सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।

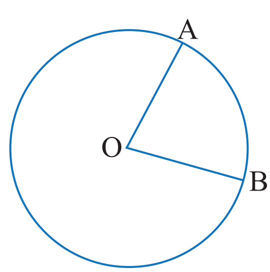
26.3 सोली (Cone)

चित्रमा आइसक्रिमको सोली र जन्मदिनमा प्रयोग गरिने टोपी दिइएको छ ।

के यिनीहरूका आकार समान छन् ? यी कस्ता आकारका ठोस वस्तु हुन् ? चित्रमा दिइएका आकृति सोली हुन् ।

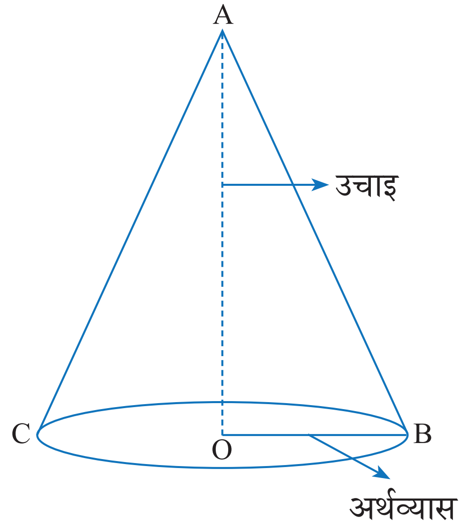
क्रियाकलाप 1

- एउटा आयताकार कागजमा एउटा वृत्त खिच्नुहोस् ।
- चित्रमा देखाइएको जस्तै गरी वृत्तको केन्द्रमा ∠AOB खिचेर AOB काट्नुहोस् ।
- अब उक्त टुक्रालाई जोडेर AO र OB लाई जोड्नुहोस् ।
- केको नमुना बन्यो होला ?



AB को नाप बराबरको परिधि हुने वृत्ताकार आधार भएको सोली बन्यो ।

चित्रमा एउटा सोली देखाइएको छ । जसमा आधारको वृत्तको अर्धव्यास (OB) = r छ । शीर्षविन्दु A देखि वृत्तको केन्द्रमा जोडिएको रेखा AO लाई सोलीको उचाइ (h) भनिन्छ ।

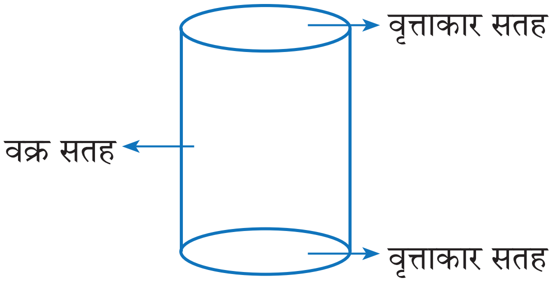


26.4 बेलना (Cylinder)

चित्रमा ब्याडमिन्टनको कर्क राख्ने भाँडो, बासको ढुङ्ग्रो दिइएको छ । के यिनीहरूका आकार समान छन् ? यी कस्ता आकारका ठोस वस्तु हुन् ? अनुमान गर्नुहोस् ।

दिइएका आकृति बेलना हुन् ।

दुईओटा समानान्तर वृत्ताकार सतह र एउटा बक्र सतह भएको ठोस आकृतिलाई बेलना (Cylinder) भनिन्छ ।



पाठ 27

ठोस आकृतिका जाली
(Nets of Solids)

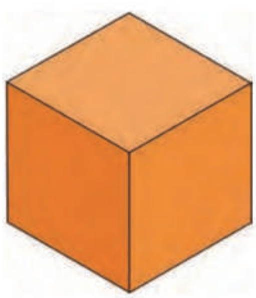
परिचय :

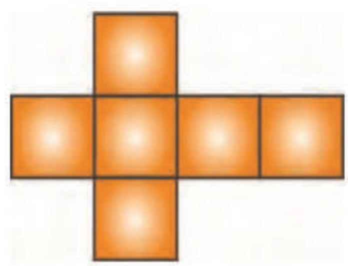
डोल्मा आफूले पढिसकेको ज्यामितीय ठोस वस्तु घन, षड्मुखा, सोली, बेलना, त्रिभुजाकार प्रिज्म र पिरामिडको आकृति बनाउँदै थिइन् । अमनले ती ठोस वस्तुका जाली कस्ता हुन्छन्, बनाऊ त भने । डोल्मालाई थाहा थिएन अनि अमनले यसरी बनाएर देखाए । तल दिइएका चित्र हेरेर हामी पनि बनाऔँ :

(क) घन (Cube)

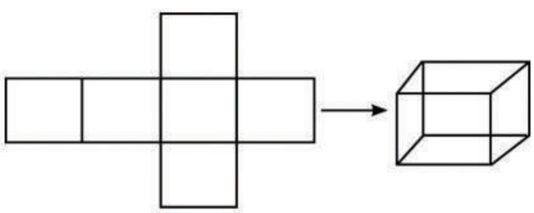
अमनले घनाकार एउटा बट्टा लिएर त्यसलाई खोलेर देखाए । यसलाई खोलेर हेरियो भने कस्तो देखिन्छ होला ? विचार गर्नुहोस् ।

घनाकार बट्टालाई खोल्दा बनेको यो चित्रलाई जाली भनिन्छ ।

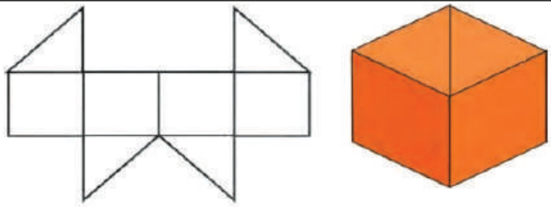




घनको जाली **घन**



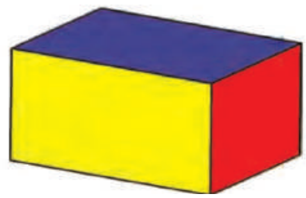
घनको जालीबाहेक अरू पनि जाली हुन्छन् कि ? खोजी गर्नुहोस् ।



घनको जाली घन

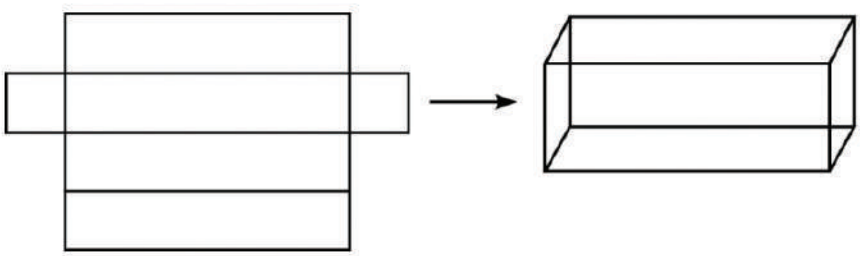
(ख) षड्मुखा (Cuboid)

कागज पट्याएर बनाइएको षड्मुखाको चित्र दिइएको छ । यसलाई खोलेर हेरियो भने कस्तो देखिन्छ होला ? षड्मुखाकार बट्टालाई काटेर सबै पाटा खोल्दा कस्तो देखिन्छ ? तपाईँले पनि प्रयास गर्नुहोस् है ।



अमनले षड्मुखाकार एउटा बट्टालाई लिएर त्यसलाई खोलेर देखाए । उनले यस्तो आकृति पाएछन्, जुन तल तालिकामा देखाइएको छ । षड्मुखाकार बट्टालाई खोल्दा बनेको यो चित्रलाई जाली भनिन्छ ।

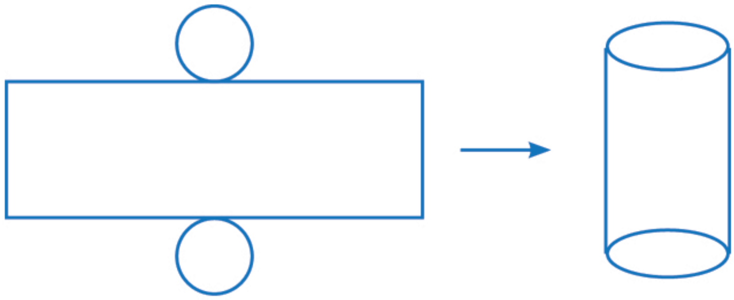
षड्मुखाको जाली षड्मुखा



(ग) बेलना (Cylinder)

अमनले ब्याडमिन्टनको कर्क राख्ने बट्टालाई काटेर हेर्दा यस्तो आकृति पाएछन् ।

बेलनाको जाली **बेलना**



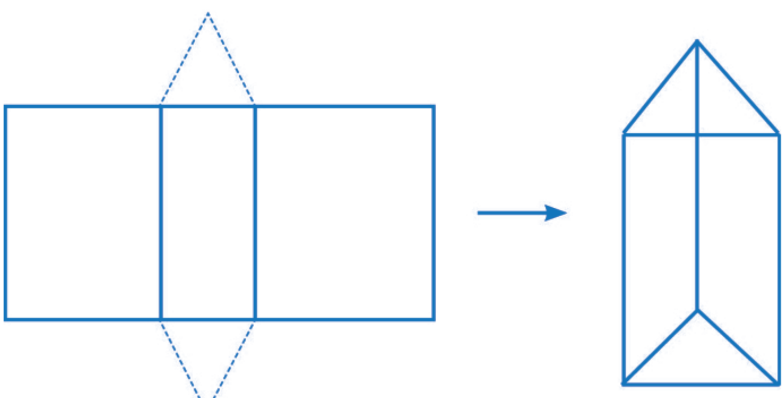
(अ) यसका सबै भागलाई कागजले पुरै ढाक्ने गरी टाँसेर पुनः निकाल्ने हो भने कस्तो देखिन्छ होला ?

(आ) बेलना बनाउने यसबाहेक अरू पनि जाली हुन्छन्, खोज्नुहोस् ।

(इ) उक्त बेलनाको जालीबाट बेलनाको निर्माण गर्नुहोस् ।

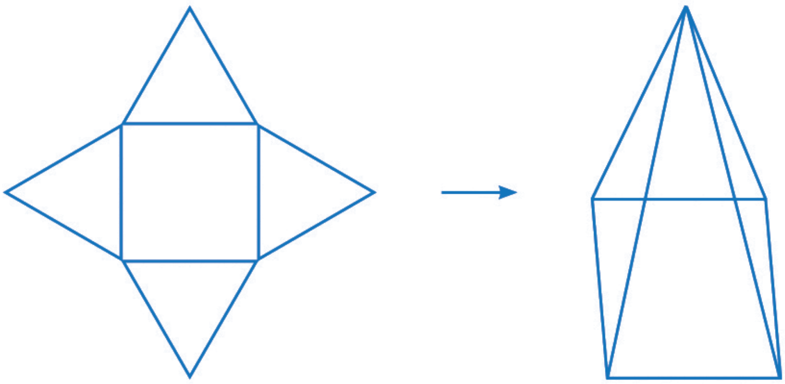
(घ) त्रिभुजाकार प्रिज्म (Triangular prism)

त्रिभुजाकार प्रिज्मको जाली **त्रिभुजाकार प्रिज्म**



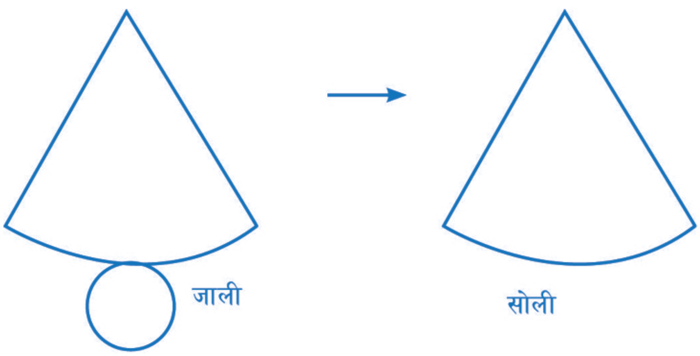
(ङ) पिरामिड (Pyramid)

पिरामिडको जाली **पिरामिड**



(च) सोली (Cone)

सोलीको जाली **सोली**



अभ्यासका लागि प्रश्न

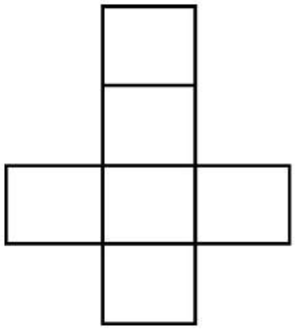
1. तलका ठोस आकृतिको जाली बनाउनुहोस् :

(क) घन (ख) बेलना (ग) षड्मुखा

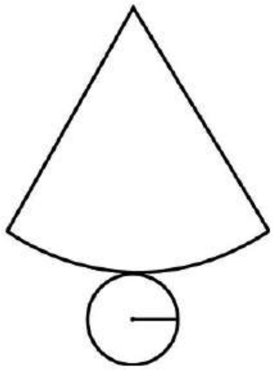
(घ) सोली (ङ) मिरामिड (च) त्रिभुजाकार प्रिज्म

2. तल दिइएका जाली कुन ठोस आकृतिका हुन् ? लेख्नुहोस् :

क.



ख.



3. परियोजना कार्य

बाक्लो कागजमा तल दिइएका ठोस आकृतिमध्ये कुनै एक जाली ट्रेस गरी काटेर पट्याउनुहोस् र नाम पनि लेख्नुहोस् अनि सम्पर्क कक्षामा सहजकर्तालाई देखाउनुहोस् ।

(क) घन (ख) बेलना (ग) षड्मुखा

(घ) सोली (ङ) पिरामिड

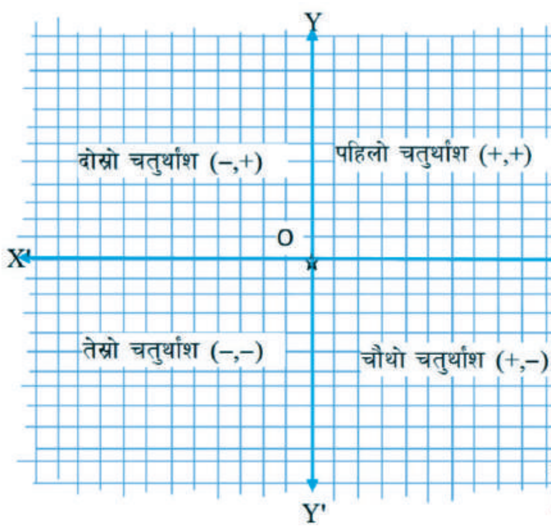
उत्तर सहजकर्तालाई देखाउनुहोस् ।

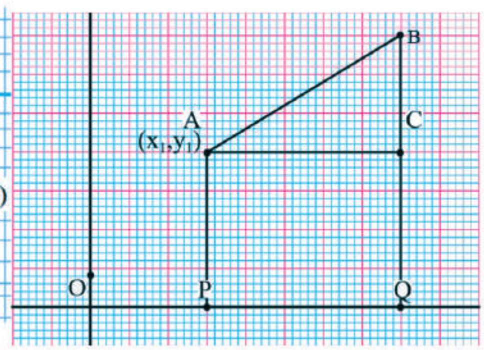
पाठ 28

निर्देशाङ्क
(Co-ordinater)

परिचय :

सँगैको चित्रमा एउटा ग्राफको नमुना देखाइएको छ। चित्रमा दुईओटा सिधा रेखा XX' र YY' आपसमा समकोण हुने गरी विन्दु O मा प्रतिच्छेदन भएका छन् । विन्दु O लाई उद्गम विन्दु भनिन्छ। आपसमा O मा प्रतिच्छेच्दित भुजालाई अक्ष (Axes) भनिन्छ। XX' लाई X अक्ष र YY' लाई Y अक्ष भनिन्छ। OX लाई धनात्मक X-अक्ष र OX' लाई ऋणात्मक X- अक्ष भनिन्छ। त्यस्तै, OY लाई धनात्मक Y अक्ष र OY' लाई ऋणात्मक Y- अक्ष भनिन्छ। सिधा रेखा XX' र YY' आपसमा समकोण हुने गरी विन्दु O मा प्रतिच्छेदन हुँदा जम्मा 4 ओटा भाग देखिएका छन् । ती XOY, YOX', XOY र Y'OX हुन् । यिनलाई क्रमशः पहिलो, दोस्रो, तेस्रो र चौथो चतुर्थांश भनिन्छ । यसरी उद्गम विन्दु O बाट दायाँतिर जाँदा धनात्मक दिशा हुन्छ भने बायाँतिर जाँदा ऋणात्मक दिशा हुन्छ। त्यसै गरी उद्गम विन्दु O बाट माथि धनात्मक दिशा मानिन्छ भने तल ऋणात्मक दिशा मानिन्छ।





28.1 दुई विन्दु बिचको दुरी (Distance between two points)

$A(x_1, y_1)$ र $B(x_2, y_2)$ दुई विन्दु छन्। यी दुई विन्दुको दुरी कसरी निकाल्ने ?

चित्रमा XOX' र YoY' क्रमशः X – अक्ष र Y – अक्ष हुन् । $A(x_1, y_1)$ र $B(x_2, y_2)$ दुईओटा विन्दु लिऔँ अब $AP \perp OX$, $BQ \perp OX$ र $AC \perp BQ$ खिचौँ ।

$\therefore \quad OP = x_1, AP = y_1, B(x\ ,y\ )$

$OQ = x_2, BQ = y_2,$

$CQ = AP = y_1,$

$AC = PQ = OQ - OP = x_2 - x_1$

$BC = BQ - CQ = y_2 - y_1$ हुन्छ ।

अब समकोण त्रिभुज ACB मा,

पाइथागोरस साध्यअनुसार

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

अतः दुई विन्दु A र B बिचको दुरी,

$\therefore \quad AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

> यसरी विन्दु $A(x_1,y_1)$ बाट $B(x_2, y_2)$ सम्मको दुरी d(AB) ले जनाइन्छ । जसको मान $d(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

विन्दु A(3, 4) र B(7, 8) बिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान :

यहाँ $x_1 = 3, \quad y_1 = 4$

$x_2 = 7, \quad y_2 = 8$

AB को दुरी d (AB) = ?

सूत्रअनुसार,

$$d(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$= \sqrt{(7-3)^2 + (8-4)^2}$

$= \sqrt{(4)^2 + (4)^2}$

$= \sqrt{16 + 16}$

$= \sqrt{32}$

$= \sqrt{2 \times 16}$

$= 4\sqrt{2}$ एकाइ

उदाहरण 2

यदि एउटा वृत्तको केन्द्र O(5,5) र परिधिको विन्दु B(10,17) पर्ने वृत्तको अर्धव्यास कति होला ?

समाधान

यहाँ, $x_1 = 5$ $y_1 = 5$

$x_2 = 10$ $y_2 = 17$

ख्सूत्रअनुसार,

$$d(OB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

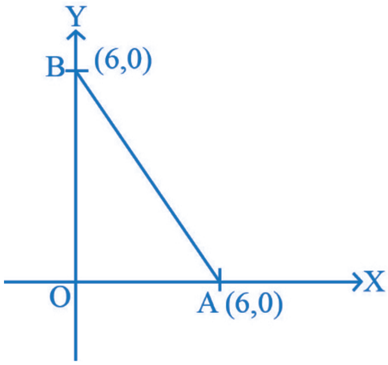
$= \sqrt{(10-5)^2 + (17-5)^2}$

$= \sqrt{(5)^2 + (12)^2}$

$= \sqrt{25 + 144}$

$= \sqrt{169}$

$= 13$ एकाइ



उदाहरण 3

x अक्षको 6 एकाइमा विन्दु A र Y अक्षको 8 एकाइमा विन्दु B छ । विन्दु A र B बिचको

दुरी पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ, $x_1 = 6$ $y_1 = 0$

$x_2 = 0$ $y_2 = 8$

हामीलाई थाहा छ,

$$d(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(0-6)^2 + (8-0)^2}$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + (8)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 64}$$

$$= \sqrt{100}$$

$= 10$ एकाइ

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. तल दिइएका विन्दुबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) (–5, –4) र (5, 4) (ख) (–4, 4) र (3, 4)

(ग) (1, –2) र (5, –6) (घ) (2, 4) र (4, 0)

2. (क) x अक्षमा 5 एकाइमा पर्ने विन्दु P र Y अक्षमा 4 एकाइमा पर्ने विन्दु Q बिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) X अक्षमा 10 एकाइमा पर्ने विन्दु A र Y अक्षमा 10 एकाइमा पर्ने विन्दु B बिचको दुरी कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. (क) केन्द्रविन्दु (0, 0) र परिधिको विन्दु (6, 7) भएको वृत्तको अर्धव्यास कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. राम विन्दु (0, 5) मा छन् भने विमला (a, o) मा छिन्। तिनीहरूबिचको दुरी $\sqrt{41}$ एकाइ भए a को मान कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. विन्दु A(1, 6) B(4, 1) र C(-4, -3) मिलेर बनेको त्रिभुज कस्तो त्रिभुज हो ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

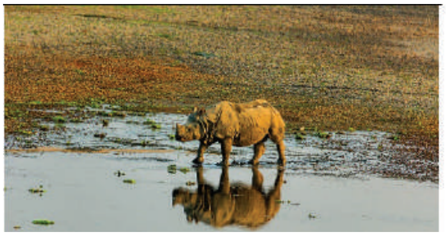
1. (क) $2\sqrt{41}$ एकाइ (ख) 7 एकाइ (ग) $4\sqrt{2}$ एकाइ (घ) $2\sqrt{5}$ एकाइ
2. (क) $\sqrt{41}$ एकाइ (ख) $10\sqrt{2}$ एकाइ
3. (क) $\sqrt{85}$ एकाइ
4. $a = 4$
5. उत्तर सहजकर्तालाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 29

स्थानान्तरण
(Transformation)

अध्ययन गरौँ :

दिइएका चित्र अवलोकन गरी ती चित्रले कस्ता कस्ता अवस्थालाई जनाउँछन् ? विचार गर्नुहोस् ।

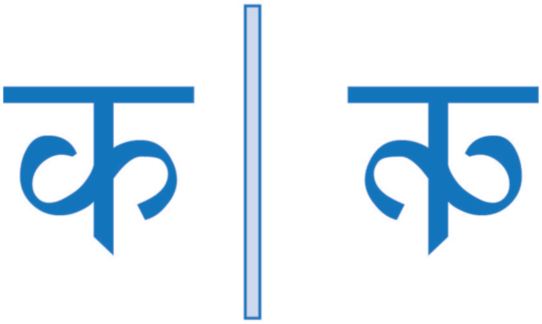


चित्रमा गैँडाको प्रतिविम्ब पानीमा भएको, बालकको ऐनाभित्रको प्रतिविम्ब परावर्तनका उदाहरण हुन् । त्यस्तै रोटे पिङ खेलेको, गोरुले दाइँ हालेको र खसी किला वरिपरि डोरी तन्कने गरी घुमेको परिक्रमणका उदाहरण हुन् । टेबलको पुस्तकलाई एक ठाउँबाट अर्को ठाउँमा सारेको विस्थापनको उदाहरण हो ।

कुनै वस्तु वा आकृतिको निश्चित आधारमा गरिने स्थान परिवर्तनलाई स्थानान्तरण भनिन्छ । यसमा परावर्तन, परिक्रमण र विस्थापन पर्छ ।

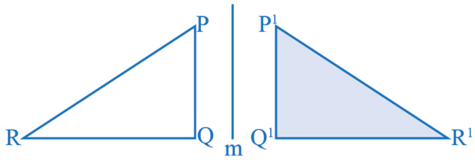
29.1 परावर्तन (Reflection)

- पानी बाहिरको गैँडा र पानी भित्रको गैँडाको प्रतिविम्ब हेर्दा कस्तो देखिन्छ ?
- तपाईँ आफ्नो कापीमा ठुलो 'क' लेखेर ऐनामा हेर्नुहोस् । कस्तो आकृति देखिन्छ ?



कुनै अक्षमा हुने स्थानान्तरणलाई परावर्तन Reflection भनिन्छ ।

चित्रमा ΔPQR लाई रेखा m (परावर्तको अक्ष) मा परावर्तन गर्दा बनेको प्रतिविम्ब $\Delta P^1 Q^1 R^1$ हो ।

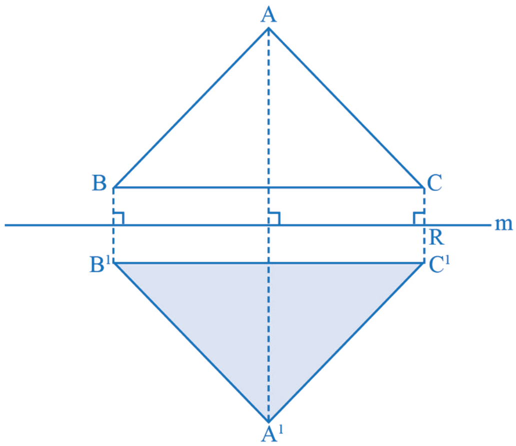


परावर्तनका विशेषता

- आकृति र त्यसको प्रतिविम्ब परावर्तनको अक्ष (ऐना) बाट बराबर दुरीमा पर्छन् ।
- आकृति र त्यसको प्रतिविम्ब एक अर्काको उल्टा देखिन्छ तर ती दुई अनुरूप हुन्छन् ।
- आकृति र प्रतिविम्बका सम्बन्धित विन्दु जाइने रेखा परावर्तनको अक्षमा लम्ब हुन्छन् ।

उदाहरण 1

दिइएको रेखा m परावतृनको अक्ष हो । ΔABC लाई m मा परावर्तन गरी प्रतिविम्बलाई चित्रमा देखाउनुहोस् ।



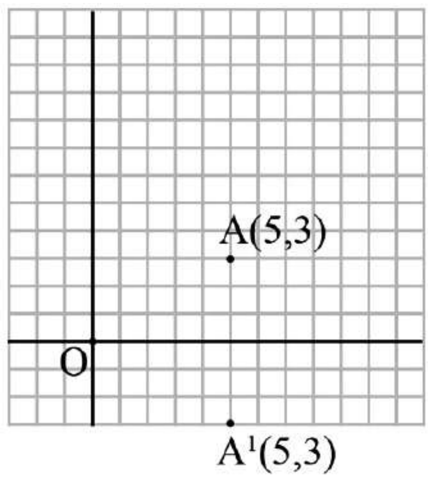
परावर्तन गर्ने तरिका

- परावर्तनको अक्ष (m) मा लम्ब हुने गरी AP खिच्नुहोस् । AP लाई $AP = A^1P$ हुने गरी A^1 सम्म लम्ब्याउनुहोस् ।
- अक्ष m मा लम्ब हुने गरी

अब हामी निर्देशाङ्कबाट परावर्तन कसरी गरिन्छ भन्ने बारेमा अध्ययन गर्ने छौं ।

(क) X अक्षबाट परावर्तन (Reflection by X-axis)

चित्रमा विन्दु A(5, 3) लिइएको छ । यसको अर्थ यो विन्दु उद्‌गम विन्दु O बाट 5 एकाइ दायाँ र x अक्षबाट 3 एकाइ माथि पर्छ ।



यदि विन्दु A(5,3) लाई x – अक्षमा परावर्तित गरियो भने परावर्तनपछिको विन्दु $A^1(5, -3)$ हुन्छ । यसबाट प्रस्ट हुन्छ कि x– अक्षबाट A^1 सम्मको दुरी बराबर हुन्छ । अर्थात् दुवै विन्दु एउटै ठाडो रेखामा x अक्षभन्दा ठिक माथि र तल पर्छन् । यसलाई विन्दु A(5, 7) को x – अक्षमा परावर्तन भनिन्छ ।

विन्दु P(x, y) लाई x अक्षमा परावर्तन गर्दा P^1 (x, –y) हुन्छ ।

(ख) Y – अक्षबाट परावर्तन (Reflection by Y-axis)

चित्रमा विन्दु B(3, 4) लिइएको छ । यसको अर्थ यो विन्दु y अक्षबाट 3 एकाइ दायाँ छ । यदि विन्दु B(3, 4) लाई y अक्षबाट परावर्तन गरियो भने परावर्तन पछिको विन्दु y अक्षबाट 3 एकाइ बायाँ B1(3, –4) हुन्छ ।

यसबाट प्रस्ट हुन्छ कि B(3, 4) र यसको परिवर्तित विन्दु $B^1(-3, 4)$ y अक्षबाट बराबर दुरीमा हुन्छन् । दुवै विन्दु एउटै तेर्स्रो रेखामा पर्छन् । यसलाई विन्दु (3, 4) को Y– अक्षमा परावर्तन भनिन्छ ।

विन्दु P(x, y) लाई y– अक्षमा परावर्तन गर्दा $P^1(-x, y)$ हुन्छ ।

उदाहरण 2 :

विन्दु P(6, 4) लाई ग्राफ पेपरमा अङ्कन गरी y– अक्षबाट परावर्तित प्रतिविम्बको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ, $A(x, y) = A(4, -3)$

$\therefore x = 4, y = -3$

हामीलाई थाहा छ,

विन्दु $P(x, y)$ लाई y अक्षबाट परावर्तन गर्दा $P^1(-x, y)$ हुन्छ ।

त्यसैले, विन्दु $A(4, -3)$ को y– अक्षमा परावर्तित प्रतिविम्बको निर्देशाङ्क $A^1(-4, -3)$ हुन्छ ।

उदाहरण 3

शीर्षविन्दु A(2,3), B(3,4) र C(5, 5) भएको त्रिभुज ABC लाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् । यसलाई x(अक्षमा परावर्तन गराई प्रतिविम्बको शीर्षविन्दुका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

दिइएका विन्दु A(2,3), B(3,4) र C(5,5) छन् । हामीलाई थाहा छ, विन्दु A(x,y) लाई X- अक्षबाट परावर्तन गर्दा,

$A(x, y)$

त्यसैले,

$A(2, 3)$	$A_1(2, -3)$
$B(3, 4)$	$B_1\ (3, -4)$
$C(5, 5)$	$C_1\ (5, -5)$

$\therefore$ ABC लाई x अक्षमा परावर्तन गर्दा बनेको प्रतिविम्ब $\Delta A^1 B^1 C^1$ हो ।

उदाहरण 4

शीर्षविन्दु A(2, 2), B(4, 6) र C(6,3) भएको त्रिभुज ABC लाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् । यसलाई y – अक्षमा परावर्तन गराई प्रतिविम्बमा शीर्षविन्दुका निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

दिइएका विन्दु A(2, 2), B(4, 6) र C(6, 5) छन् ।

हामीलाई थाहा छ,

P(x, y)

त्यसैले, A(2, 2) $A^1(-2, 2)$

B(4, 6) $B^1(-4, 6)$

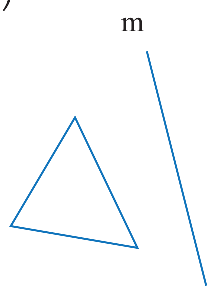
C(6, 5) $C^1(-6, 5)$

$\therefore$ ABC लाई y– अक्षमा परावर्तन गर्दा बनेको प्रतिविम्ब $\Delta A^1 B^1 C^1$ हो ।

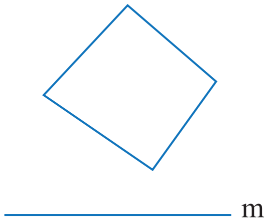
अभ्यासका लागि प्रश्न

1. दिइएका ज्यामितीय आकृतिलाई परावर्तन अक्ष m सँग परावर्तन गरी प्रतिविम्ब चित्र देखाउनुहोस् :

(क)



(ख)



2. लेखाचित्रको प्रयोग गरी दिइएका निर्देशाङ्कलाई x- अक्षसँग परावर्तन गरी प्रतिविम्बको निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् :

(क) (5, 6) (ख) (-1, 7) (ग) (-3, -5)

(घ) (5, 0) (ङ) (5, -9) (च) (0, 4)

3. तल दिइएका निर्देशाङ्कलाई y- अक्षसँग परावर्तन गरी प्रतिविम्बको निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् ।

(क) (6, 6) (ख) (-3, 7) (ग) (-4, -5)

(घ) (6, -9) (ङ) (0, 8) (च) (0, -5)

4. P(4,3), Q(7,3) र R(4, -3) त्रिभुज PQR का शीर्षविन्दु हुन् । त्रिभुज PQR लाई x- अक्षबाट परावर्तन गर्नुहोस् । दिइएको त्रिभुज प्राप्त PQR र प्रतिविम्ब $\Delta P^1 Q^1 R^1$ लाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

5. A(-2, 3), B(-5, 2) र C(-4, 5) लाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी X- अक्षबाट परावर्तन गर्नुहोस् ।

उत्तर

उत्तर सहजकर्तालाई देखाउनुहोस् ।

29.2 परिक्रमण (Rotation)

अध्ययन गरौँ :

के रिँगटे पिङ घुमाउँदा पिङमा खेल्न बसेका मानिसका स्थान परिवर्तन होला ?

हो, रिँगटे पिङ घुमाउँदा पिङमा खेल्न बसेका मानिसको स्थान पनि परिवर्तन हुन्छ ।

यसरी, ज्यामितीय विन्दु अथवा चित्रलाई कुनै दिएको विन्दुको वरिपरि दिएको दिशामा र दिएको कोणमा घुमाउने प्रक्रियालाई परिक्रमण भनिन्छ ।

यसरी घुमाएर प्राप्त हुने स्थानान्तरणलाई परिक्रमण स्थानान्तरण भनिन्छ ।

परिक्रमणका लागि तीनओटा अवस्था आवश्यक छन् ।

- परिक्रमणको केन्द्र (Center of rotation)
- परिक्रमणको कोण (Angle of Rotation)
- परिक्रमणको दिशा (Direction of Rotation)

परिक्रमणको दिशा दुई प्रकारको हुन्छ ।

- **घनात्मक दिशा :** घडीको सुई घुम्ने दिशाको विपरित दिशालाई परिक्रमणको घनात्मक दिशा भनिन्छ ।
- **ऋणात्मक दिशा :** घडीको सुई घुम्ने दिशालाई परिक्रमणको ऋणात्मक दिशा भनिन्छ ।

परिक्रमणको केन्द्रको रूपमा उद्गम विन्दुलाई लिने गरिन्छ ।

(क) उद्गम विन्दु O(0, 0) बाट +90° मा परिक्रमण

क्रियाकलाप

लेखाचित्रमा एउटा विन्दु लिनुहोस् । जस्तै : A(3, 4) छ । चित्र

- अब विन्दु O र A लाई जोड्नुहोस् ।
- रेखा OA लाई आधार लिई विन्दु O मा 90° को कोण खिच्नुहोस् ।
- $OA = OA^1$ हुने गरी कम्पासको सहायताले विन्दु A^1 पत्ता लगाउनुहोस् ।
- अब लेखाचित्रमा हेरेर विन्दु A^1 को निर्देशाङ्क पढ्नुहोस् ।

चित्रमा विन्दु A(3, 4) विन्दु $A^1(-4, 3)$ मा परिणत भएको पायौँ ।

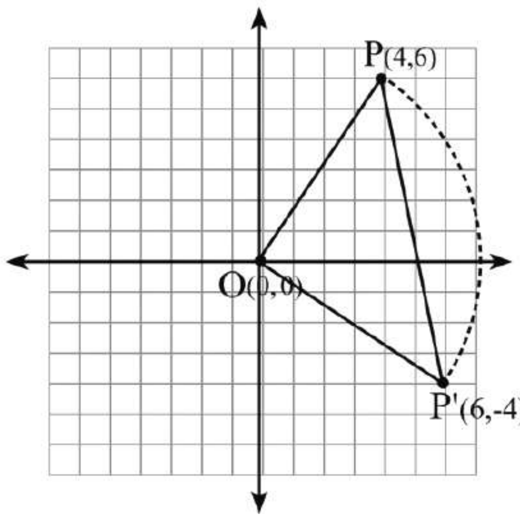
अतः कुनै विन्दु P(x, y) लाई उद्गम विन्दुको चारैतिर घनात्मक 90° मा परिक्रमण गर्दा प्रतिविम्ब विन्दु $P^1(-y, x)$ प्राप्त हुन्छ ।

अतः $$P(x, y) + \xrightarrow[\text{घनात्मक}]{90^\circ \text{ मा}} P + (-y, x)$$

विन्दु P (4, 5) लाई उद्गम विन्दु O (0, 0) केन्द्र हुने गरी –90° को कोणमा परिक्रमण कसरी गर्ने होला ?

Y विन्दु P (4, 6) लाई लेखाचित्रमा घडीको सुईको दिशामा वा ऋणात्मक दिशामा 90° परिक्रमण गराउदाँ P (4, 6) बाट P' (6, –4) बनको पाइयो ।

जसलाई ग्राफमा देखाउँदा,



(क) परिक्रमणको केन्द्र उद्गम विन्दु O (0, 0) भएकाले P र O जोड्नुहोस् ।

(ख) परिक्रमणको कोण –90° भएकाले कोण O मा 90° को कोण बनाउनुहोस् ।

(ग) PO बराबरको चाप लिई –90° को कोण बनाएको रेखामा विन्दु O बाट काट्नुहोस् ।

(घ) P(4, 6) को प्रतिविम्ब P' (6,–4) भयो र ∠POP' = 90° भयो ।

माथि विन्दु P(4, 6) लाई + 90° बाट परिक्रमण गराउँदा प्रतिविम्ब कस्तो बन्छ, अनुमान गर्नुहोस् । तपाईँले गरेको अनुमान कति मिल्यो ?

चित्रमा विन्दु A(4, 6) विन्दु A^1(6, -4) मा परिणत भएको पायौं ।

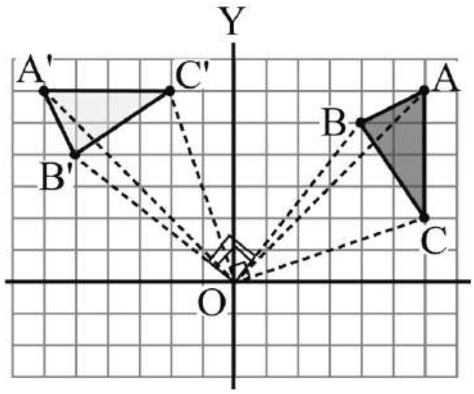
अतः कुनै विन्दु P(x, y) लाई उद्गम विन्दुको चारैतिर ऋणात्मक 90° मा परिक्रमण गर्दा प्रतिविम्ब विन्दु P^1(y, –x) प्राप्त हुन्छ ।

अतः $P(x, y) \xrightarrow[\text{ऋणात्मक}]{90^\circ \text{ मा}} P + (y, -x)$

उदाहरण 1 :

शीर्षविन्दु A(6, 6), B(4, 5) र C(6, 2) भएको एउटा त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । उक्त त्रिभुजलाई उद्गम विन्दु (0,0) बाट

(क) 90° धनात्मक दिशामा परिक्रमण गर्नुहोस् ।



समाधान

यहाँ ΔABC का शीर्षविन्दु क्रमशः (6,6), (4,5) र (6,2) छन् ।

अब विन्दु A, B र C लाई क्रमशः 90° मा X'X परिक्रमण गराउँदा बन्ने प्रतिविम्ब त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा छाया पारी देखाइएको छ ।

A(6,6)→A'(-6,6),→B(4,5)→B'(-5,4) र C(6,2)→C'(-2,6) हुन्छ ।

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. **तलका विन्दु ग्राफमा अङ्कन गर्नुहोस् र उद्गम विन्दु केन्द्र हुने गरी 90° धनात्मक हुने गरी परिक्रमण गर्नुहोस् :**

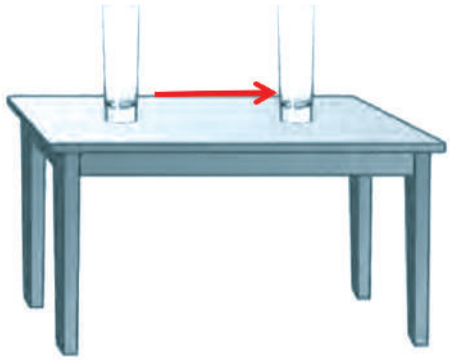
(क) (-8,7) (ख) (7,-7) (ग) (0,9) (घ) (8,0) (ङ) (-3,-7)

(च) (3,-5) (छ) (1,-8) (ज) (0,8) (झ) (0,0) (ञ) (-5,-9)

2. तलका विन्दु ग्राफमा अङ्कन गर्नुहोस् र उदगम विन्दु केन्द्र हुने गरी 90° ऋणात्मक हुने गरी परिक्रमण गर्नुहोस् :

(क) (-4,5)   (ख) (4,-2)   (ग) (5,0)   (घ) (3,9)   (ङ) (-4,-4)

(च) (2,-7)   (छ) (10,-10)   (ज) (0,8)   (झ) (0,0)   (ञ) (-9,-3)



3. माथि प्रश्न 1 र 2 मा कस्तो कस्तो सम्बन्ध देख्नुभयो ? सूत्रको रूपमा उल्लेख गर्नुहोस् ।

4. A(0,0), B(3,0) र C(3,3) शीर्षविन्दु भएको एउटा त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा खिची त्यसलाई उद्गम विन्दु O(0, 0) बाट (क) +90° र (ख) –90° मा परिक्रमण गराई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

5. दिइएका शीर्षविन्दुबाट बन्ने ज्यामितीय आकृतिलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी उद्गम विन्दु O(0, 0) बाट (क) +90° र (ख) –90° मा परिक्रमण गराई छुट्टाछुट्टै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(i) (2, 7), (3, 3) र (6, 7)

(ii) (3, 2), (-2, 2) र (6, 5)

(iii) (10, 6) र (11, 6)

उत्तर: उत्तर सहजकर्तालाई देखाउनुहोस् ।

29.3 विस्थापन (Translation)

अध्ययन गरौँ :

दिइएको चित्रमा गिलासलाई एक ठाउँबाट अर्को ठाँउमा सारिएको छ ।

कुनै पनि वस्तु वा आकृतिलाई निश्चित दिशा र दुरीमा सार्नुलाई विस्थापन भनिन्छ ।

चित्रमा गिलासलाई जति सारे पनि गिलासको आकार उस्तै र उत्रै हुन्छ ।

यसरी समतल सतहमा रहेका वस्तु वा ज्यामितीय आकृतिका हरेक विन्दुलाई उत्तिकै दुरी र उही दिशामा स्थानान्तरण हुनुलाई विस्थापन भनिन्छ ।

> कुनै पनि विन्दु वा वस्तुलाई दिइएको दिशामा निश्चित दुरीमा सार्नु वा स्थानान्तरण गर्नुलाई विस्थापन (Translation) भनिन्छ । विस्थापनका लागि विस्थापनको परिमाण र दिशा उल्लेख गर्नु आवश्यक छ ।
>
> कुनै निर्देशाङ्कलाई दायाँ बिस्थापन गर्दा +, बायाँ विस्थापन गर्दा –, माथि विस्थापन गर्दा + र तल विस्थापन गर्दा – लेखिन्छ ।

क्रियाकलाप 1: विन्दु (-2,1) लाई लेखाचित्रमा अड्कन गर्नुहोस् । उक्त विन्दुलाई 3 एकाइ दायाँ र 5 एकाइ तल सार्दा पुग्ने विन्दु पत्ता लगाउनुहोस् ।

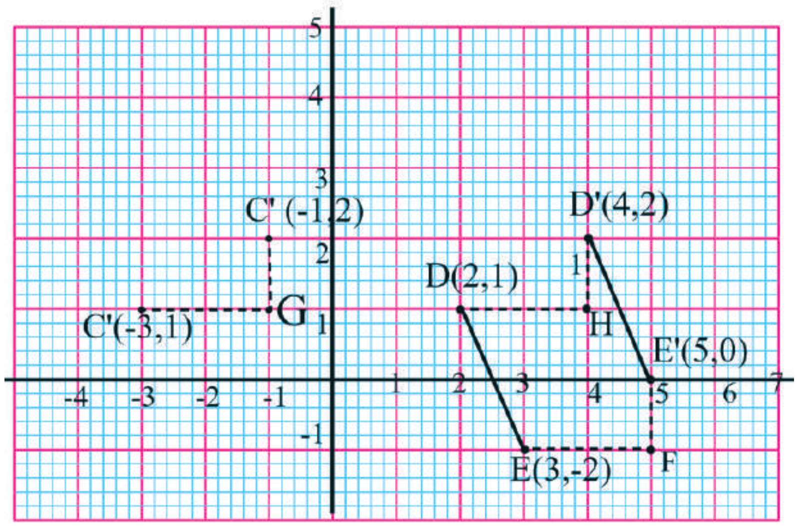
विन्दु (–2,1) लाई 3 एकाइ दायाँ र छ एकाइ तल सार्दा (1,-4) मा पुग्छ ।

यहाँ, विन्दु (-2,1) लाई विस्थापन गर्दा X को मानमा घ एकाइ थपिएको 5 र Y को मानमा –5 एकाइ थपिएका छ । त्यसैले,

$P(-2,1) \rightarrow P^1\ [-2+3,\ 1+(-5)] = P^1\ (1, -4)$

क्रियाकलाप 2 : विन्दु (3,2) लाई लेखाचित्रमा अड्कन गर्नुहोस् । उक्त विन्दुलाई 3 एकाइ दायाँ र 2 एकाइ माथि सार्दा पुग्ने विन्दु पत्ता लगाउनुहोस् ।

विन्दु p लाई विन्दु p' मा विस्थापन गरिएको छ । विस्थापनको नियम 3 एकाइ दायाँ र 2 एकाइ माथि हो । यसलाई (3, 2) ले जनाइन्छ । A लाई 3 एकाइ दायाँ अनि 2 एकाइ माथि लगिएको छ ।



जसअनुसार A(1, 2) लाई A'(4, 4) मा विस्थापन गरियो । उदाहरण 1

(क) विन्दु C लाई 2 एकाइ दायाँ र 1 एकाइ माथि विस्थापत गर्नुहोस् ।

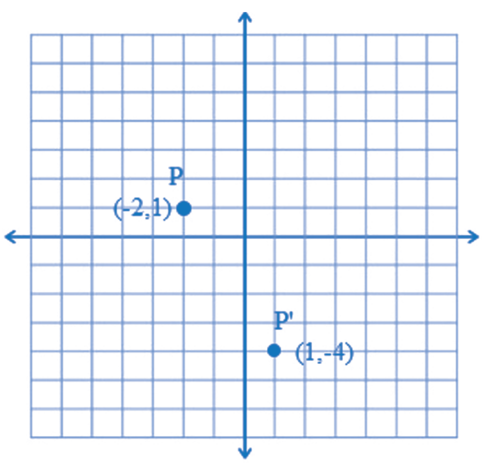
(ख) रेखा DE लाई 2 एकाइ दायाँ र 1 एकाइ माथि विस्थापत गर्नुहोस् ।

समाधान

विन्दु C(-3, 1) लाई 2 एकाइ दायाँ ल्याउँदा विन्दु G मा पुग्छ र त्यसलाई 1 एकाइ माथि लगदा विन्दु C'(-1,2) मा पुग्छ । जसलाई यसरी लेखिन्छ। C(-3,1) विस्थापन C`(-1, 2)

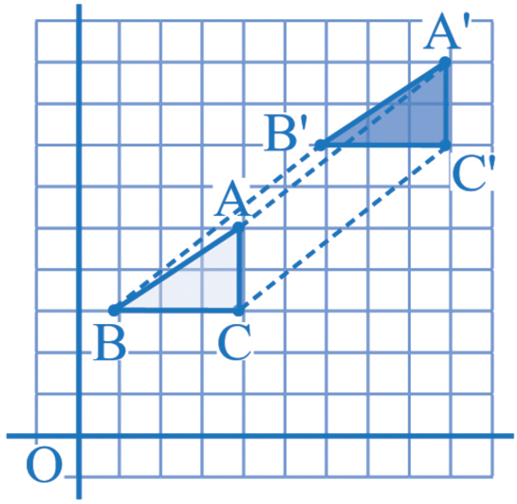
त्यस्तै D (2, 1) को 2 एकाइ दायाँ र 1 एकाइ माथिको विस्थापन गर्दा D'(4, 2) हुन्छ।

E(3,-1) को 2 एकाइ दायाँ र 1 एकाइ माथि विस्थापन गर्दा E'(5, 0) हुन्छ । जसअनुसार D'E' रेखा DE को विस्थापन प्रतिविम्ब भयो।



क्रियाकलाप 3: सँगैको चित्रमा ΔABC दिइएको छ र उक्त त्रिभुजलाई 5 एकाइ दायाँ र 4 एकाइ माथि विस्थापन गरी आकृति A'B'C' पुऱ्याइएको छ । अब उक्त आकृतिको निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् ।

समाधान



अब ΔABC र ΔA'B'C का शीर्ष विन्दुका X निर्देशाङ्क हेरौं ।

ΔABC	ΔA'B'C'
A(4, 5)	A'(9, 9)
B(1, 3)	B'(6, 7)
C(4, 3)	C(9, 7)

यहाँ विस्थापन अगाडि र विस्थापन पछाडिको x र y निर्देशाङ्क हेरौं ।

तीनओटै शीर्षविन्दुमा x को मानमा विस्थापनपछि 5 थपिएको छ । त्यस्तै y को मानमा पनि विस्थापन पछि 4 थपिएको छ । विस्थापनपछि प्रतिविम्ब त्रिभुजलाई छाया पारी देखाइएको छ ।

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. विन्दु (7,-3) लाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी 5 एकाइ दायाँ र 3 एकाइ माथि विस्थापन गरी प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

2. तलका निर्देशाङ्कलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी 6 एकाइ बायाँ र 4 एकाइ माथि विस्थापन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(क) (3, 8)　　(ख) (–2, 7)　　(ग) (–1, 3)　　(घ) (–4, 6)

(ङ) (3, 4)　　(च) (5, –6)　　(छ) (–3, 9)　　(ज) (–3, –4)

3. P(-7,-2) र Q(7,6) लाई 3 एकाइ दायाँ र 4 एकाइ माथि विस्थापन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

4. शीर्षविन्दु A(2, 0), B(5, 5) र C(9, –3) भएको ΔABC लाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी 5 एकाइ दायाँ र एकाइमाथि विस्थापन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

5. शीर्षविन्दु A(2, –5), B(6, 5) र C(3, –4) भएको ΔABC लाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी 6 एकाइ बायाँ र 3 एकाइ तल विस्थापन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1.	(क) (12,0)			
2.	(क) (9,12)	(ख) (4,11)	(ग) (5,7)	(घ) (2,10)
	(ङ) (9,8)	(च) (11,-2)	(छ) (3,13)	(ज) (3,0)
3.	उत्तर सहजकर्तालाई देखाउनुहोस् ।			

पाठ 30

दिशा स्थिति र स्केल ड्र्इङ्ग
(Bearing and Scale Drawing)

30.1 दिशा स्थिति (Bearing)

परिचय

हामी कुनै नयाँ ठाउँमा पुग्यौं तर कुन दिशामा छौं भन्ने थाहा भएन भने दिशा स्थिति कसरी पत्ता लगाउन सक्छौं ? तपाईँलाई थाहा छ ?

हो, दिशा स्थिति पत्ता लगाउनका लागि कम्पासको प्रयोग गरिन्छ ।

दिइएको चित्रको अवलोकन गरेर सोधिएका प्रश्नका उत्तर खोजी गर्नुहोस् ।

(क) चित्रमा देखाइएको उपकरण के कामका लागि प्रयोग गरीन्छ ?

(ख) उपकरणमा भएका N,S,E,W ले के के जनाउँछ ?

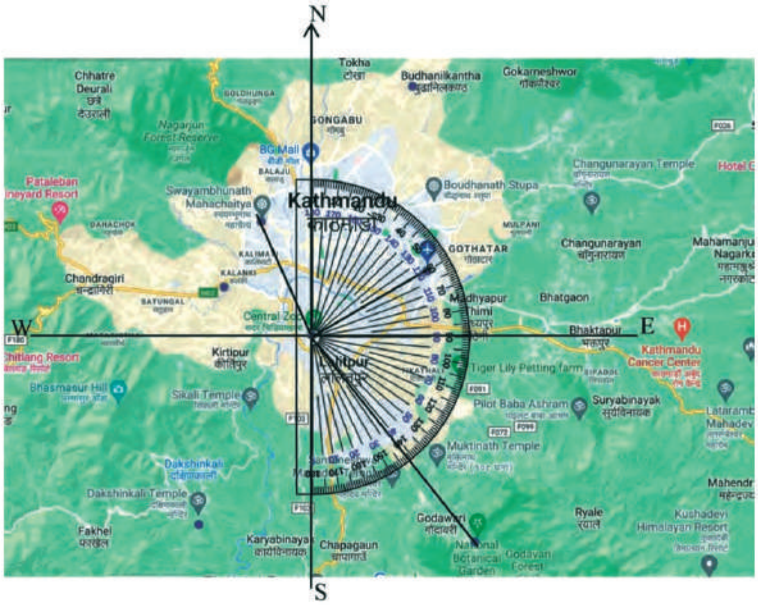
(ग) उपकरणमा कुन दिशालाई आधार मानिएको हुन्छ ?

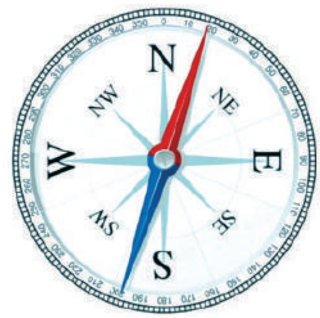
(घ) उपकरणमा भएका NE,SE,SW,NW ले के के जनाउँदछ ?

माथि दिइएको चित्र कम्पासको हो । कुनै पनि ठाउँको सही भौगोलिक दिशा स्थिति पत्ता लगाउनका लागि कम्पासको प्रयोग गरिन्छ। कम्पासले जहिले पनि उत्तर र दक्षिण दिशा देखाउने गर्छ । दिशास्थितिका लागि मुख्य आधार उत्तर र दक्षिण दिशालाई लिइन्छ । उपकरणमा भएका N,S,E,W ले उत्तर, दक्षिण, पूर्व र पश्चिम दिशालाई जनाउँछ । उपकरणमा भएका NE,SE,SW,NW ले उत्तर पूर्व, दक्षिण पूर्व, दक्षिण पश्चिम र उत्तर पश्चिमलाई जनाउँछ ।

N $\Rightarrow$ उत्तर (North)	S $\Rightarrow$ दक्षिण (South)
E $\Rightarrow$ पूर्व (East)	W $\Rightarrow$ पश्चिम (West)
NE $\Rightarrow$ उत्तर पूर्व (North East)	SE $\Rightarrow$ दक्षिण पूर्व (South East)
SW $\Rightarrow$ दक्षिण पश्चिम (South West)	NW $\Rightarrow$ उत्तर पश्चिम (North West)

क्रियाकलाप 1





माथि काठमाडौँ उपत्यकाको नक्सा दिइएको छ । यहाँ सदर चिडियाखानाबाट अन्तर्राष्ट्रिय विमानस्थल 060° को दिशा स्थितिमा छ । यसै गरी चिडियाखानाबाट कलङ्की र बानेश्वरको दिशा पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर दिशा जनाउने रेखालाई आधार रेखा मानेर घडीको सुईको दिशामा कुनै स्थानबाट अर्को स्थानको अवस्थिति जनाउने तरिकालाई दिशा स्थिति भनिन्छ । यसलाई जनाउन तीनओटा अङ्कको प्रयोग गरिन्छ । यसको प्रयोग हवाई जहाज तथा पानी जहाजका चालकले प्रयोग गर्छन् । माथि चिडियाखानाबाट अन्तर्राष्ट्रिय विमानस्थल दिशा स्थिति छ ।

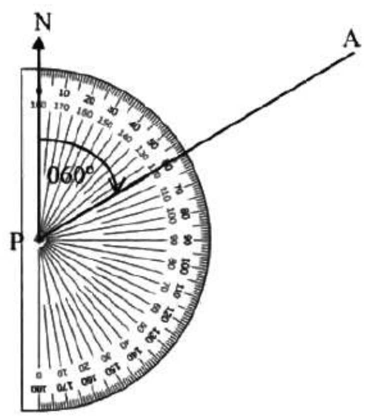
P स्थानबाट

(क) 060° को दिशा स्थिति पर्ने स्थान पत्ता लगाउनुहोस् ।

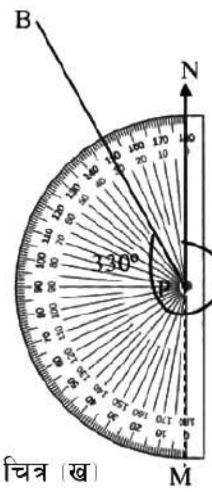
(ख) 330° को दिशा स्थिति पर्ने स्थान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ P विन्दुमा उत्तर दिशा जनाउने रेखा PN खिचिएको छ ।



चित्र (क)



चित्र (ख)

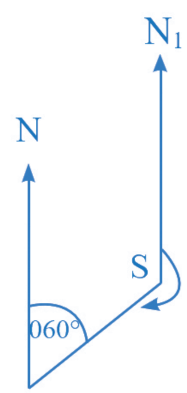
(क) PN सँग 60° हुने गरी PA खिचिएको छ। अतः P विन्दुबाट A को दिशा स्थिति $\angle NPA = 060^{\circ}$ हुन्छ।

(ख) यसै गरी ए विन्दुबाट रेखा PN सँग 330° हुने गरी रेखा BP खिच्न न्यूनकोण

NPB $= 360^{\circ} - 330^{\circ} = 30^{\circ}$ खिच्नुपर्छ। अतः P विन्दुबाट B को दिशा स्थिति बृहत् कोण $\angle NPB = 330^{\circ}$ हुन्छ।

अर्थात् NP लाई सिधा : सम्म लम्बाएर $\angle NPM + \angle MPB = 180^{\circ} + 150^{\circ} = 330^{\circ}$ अतः P विन्दुबाट B को दिशा स्थिति बृहत् कोण $\angle NPB = 330^{\circ}$ हुन्छ।

उदाहरण 1 : R स्थानबाट स्थान S को दिशा स्थिति 060° छ भने स्थान S बाट R का दिशा स्थिति कति होला पत्ता लगाउनुहोस्।



समाधान

यहाँ R बाट S को दिशा स्थिति ? NRS = 050°

$<NRS + <N1SR = 180^{\circ}$

or, $060^{\circ} + <N1SR = 180^{\circ}$

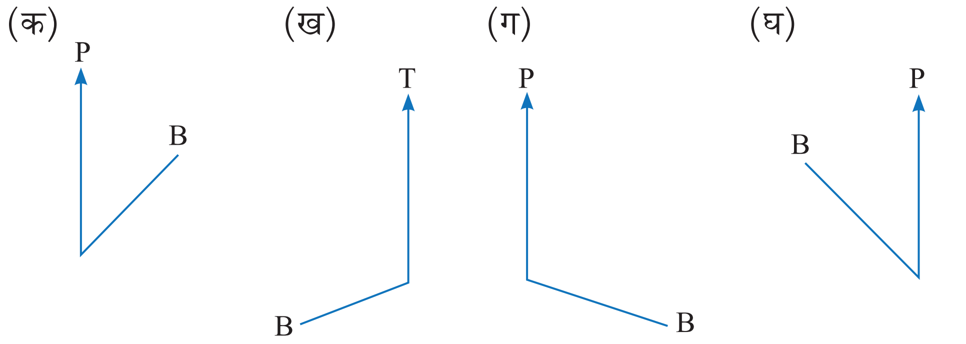
or, $<N1SR = 180^{\circ} - 060^{\circ} = 120^{\circ}$

अब S बाट R को दिशा स्थिति $= 360^{\circ} - 120^{\circ}$

$= 240^{\circ}$

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. दिइएका चित्रमा कोण नापेर स्थान P बाट स्थान B को दिशा स्थिति लेख्नुहोस् :



2. कुनै विन्दु A बाट तल दिइएको दिशा स्थितिमा पर्ने कुनै एक एक स्थान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) 050° (ख) 090° (ग) 145° (घ) 290° (ङ) 315°

उत्तर

उत्तर सहजकर्तालाई देखाउनुहोस् ।

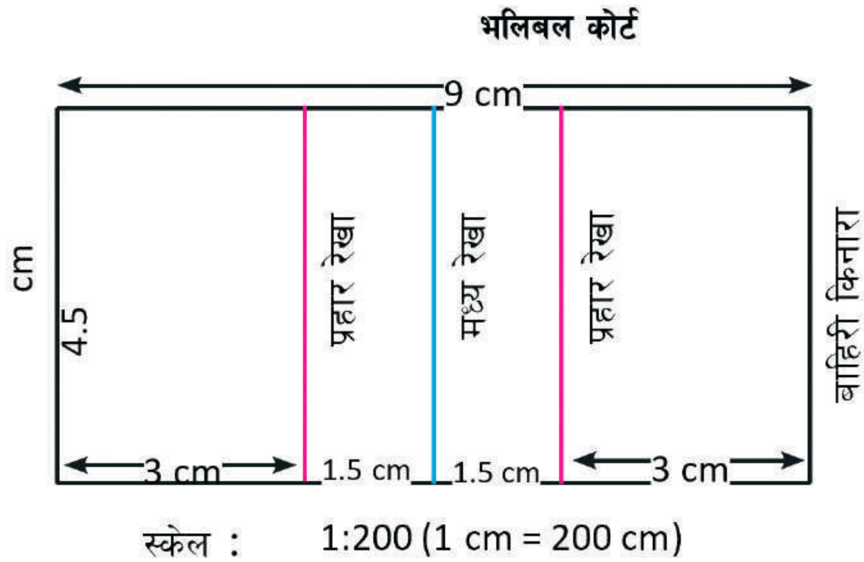
30.2 स्केल ड्रइङ्ग (Scale Drawing)

- पर्यटकहरू नक्सा हेर्दै हिँडेको देख्नुभएको छ ?
- नक्साको आधारमा विभिन्न ठाउँबिचको दुरी कसरी थाहा पाउने होला ?
- वास्तविक दुरी र नक्सामा रेखाको लम्बाइमा के सम्बन्ध होला ?
- स्केल ड्रइङ भनेको के हो ?

निश्चित स्केलको प्रयोग गरी ज्यादै ठुला र ज्यादै साना वस्तुलाई रेखाङ्कन गर्न सकिन्छ । यसरी गर्ने ड्रइङलाई स्केल ड्रइङ भनिन्छ ।

क्रियाकलाप 2

दिइएको अवस्थाको अध्ययन गर्नुहोस् :



क्र.स.	रेखाको नाम	नक्साको रेखाको नाप	वास्तविक कोर्टको नाप	वास्तविक नाप र नक्साको नापको अनुपात	निष्कर्ष
1.	कोर्टको लम्बाइ	9 cm	18 m	1:200	
2 .	कोर्टको चौडाइ				
3 .	मध्य रेखादेखि प्रहार रेखासम्मको दुरी				

- वास्तविक कोर्टको चौडाइ र नक्साको चौडाइको अनुपात कति छ ?
- वास्तविक कोर्टको लम्बाइ र नक्साको लम्बाइको अनुपात कति छ ?
- नक्साको मध्य रेखादेखि प्रहार रेखासम्मको दुरी 1.5 cm छ भने वास्तविक दुरी कति होला ?

- माथिको भलिबल कोर्टलाई स्केल 1 cm = 1 इन्च लिएर ड्इङ पेपरमा नक्सा तयार गर्नुहोस् ।
- माथिको छलफलका आधारमा के निष्कर्ष निकाल्न सकिन्छ ?

निष्कर्ष : निश्चित स्केलको प्रयोग गरी ज्यादै ठुला र ज्यादै साना वस्तुलाई रेखाङ्कन गर्न सकिन्छ ।

स्केलमा वास्तविक वस्तु र चित्र (नक्सा) खिचेर आवश्यकताअनुसार ठुलो वा सानो नाप लिएर निश्चित अनुपात बनाइन्छ ।

निश्चित स्केलको प्रयोग गरी नक्साबाट वस्तुको वास्तविक नाप निकाल्न सकिन्छ ।

उदाहरण 1

चित्रमा एउटा गाउँका मुख्य ठाउँ देखाइएको छ ।

यदि स्केल 1 cm = 200 m

भए रुलर प्रयोग गरी स्वस्थ्य चौकीबाट

मन्दिरको वास्तविक दुरी पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

स्वास्थ्य चौकीबाट मन्दिर सम्मको वास्तविक दुरी = 2 cm

नक्साको दुरी 1 cm = वास्तविक दुरी 200 m

नक्साको दुरी 2 cm = वास्तविक दुरी कति होला ?

नक्साको दुरी 2 cm = 2 × 200 m (वास्तविक दुरी)

= 400 m

अतः स्वस्थ्य चौकीबाट मन्दिरसम्मको वास्तविक दुरी = 400 m

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. नेपालको वास्तविक नक्साको अवलोकन गरी सोधिएका प्रश्नको जवाफ

लेख्नुहोस् :

(क) काठमाडौँबाट पोखराको दिशास्थिति पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) काठमाडौँबाट भैरहवाको दिशास्थिति पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) काठमाडौँबाट वीरगञ्जको दिशास्थिति पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) काठमाडौँबाट बिराटनगरको दिशास्थिति पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. चित्रमा एउटा गाउँका मुख्य ठाउँ देखाइएको छ ।

यदि स्केल 1 cm = 100 m भए रुलर प्रयोग गरी स्वस्थ्य चौकीबाट निम्नलिखित ठाउँको वास्तविक दुरी पत्ता लगाउनुहोस् :

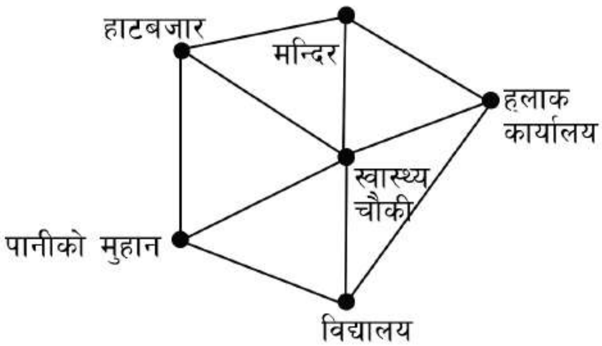
(क) मन्दिर

(ख) पानीको मुहान

(ग) विद्यालय

(घ) हाटबजार

(ङ) हुलाक कार्यालय



उत्तर

उत्तर सहजकर्तालाई देखाउनुहोस् ।

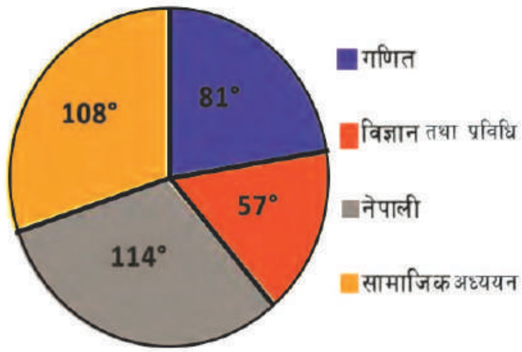
एकाइ 6 तथ्याङ्कशास्त्र
(Statistics)

पाठ 31 वृत्तचित्र (Pie Chart)

अध्ययन गरौँ :

सँगैको चित्रमा नमुना माध्यमिक विद्यालयमा अध्ययनरत 480 जना विद्यार्थीलाई 'कुन विषय मन पर्छ ?' भनी सोधिएको प्रश्नमा प्राप्त उत्तरका आधारमा तयार गरिएको वृत्तचित्र दिइएको छ। जसमा मन पर्ने विषय विवरणका विभिन्न शीर्षकलाई वृत्तको विभिन्न क्षेत्रक वा सेक्टर (Sector) मा देखाइएको छ।

विद्यार्थीलाई मनपर्ने विषय विवरण



> यसरी कुनै पनि तथ्याङ्कलाई एउटा वृत्तको क्षेत्रक वा सेक्टरमा प्रस्तुत् गरिन्छ भने उक्त चित्रलाई वृत्तचित्र भनिन्छ।

क्रियाकलाप 1: रामलालको परिवारको वार्षिक खर्च विवरण दिइएको छ।

शीर्षक	शिक्षा	खाना	लत्ताकपडा	अन्य खर्च
खर्च रकम	रु. 10,000	रु. 18,000	रु. 5,000	रु. 3,000

उसको परिवारमा शिक्षा, स्वास्थ्य, लत्ताकपडा र खानामा खर्च हुने रहेछ। वृत्तको केन्द्रमा पूरा कोण 360° हुन्छ। त्यसैले जम्मा खर्चलाई शीर्षकगत रूपमा 360° मा बाँडफाँट गर्नुपर्ने हुन्छ, तर कसरी ?

रामलालको परिवारको जम्मा खर्च . रु 36,000 छ। यसलाई 360° मा बराबर बाँड्नुपर्छ।

रु. 36,000 $= 360^\circ$

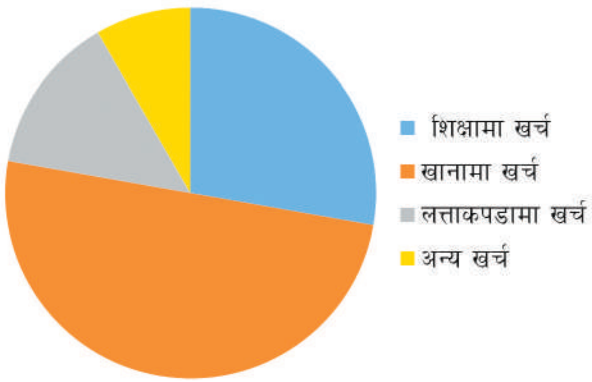
रु. 1 $= \dfrac{360^\circ}{36000}$

शिक्षामा खर्च $= \frac{360°}{36000} \times 10000 = 100°$

खानामा खर्च $= \frac{360°}{36000} \times 18000 = 180°$

लत्ताकपडामा खर्च $= \frac{360°}{36000} \times 5000 = 50°$

अन्य खर्च $= \frac{360°}{36000} \times 3000 = 30°$



कुनै पनि तथ्याङ्कलाई एउटा वृत्तको क्षेत्रफलसँग बराबर हुने गरी विभिन्न शीर्षकलाई क्षेत्रक (Secto-r) मा प्रस्तुत गरिन्छ भने उक्त चित्रलाई वृत्तचित्र (Pie chart) भनिन्छ। दिइएको तथ्याङ्कलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्दा निम्नलिखित चरण अपनाउनुपर्छ :

चरण 1. : दिइएको तथ्याङ्कको जम्मा मान निकाल्ने

चरण 2. : तथ्याङ्कको जम्मा मानलाई 360° सँग बराबर गरी प्रत्येक शीर्षकगत कोण निकाल्ने

चरण 3. : आफ्नो अनुकूल अर्धव्यास लिई वृत्तको रचना गरी एउटा अर्धव्यास खिच्ने

चरण 4. : उक्त अर्धव्यासलाई आधार रेखा मानी प्रोट्याक्टरले शीर्षकगत कोण क्रमशः खिच्दै जाने

चरण 5 : फरक फरक क्षेत्रकलाई फरक फरक रङ लगाउने। रङअनुसारको खर्चलाई सङ्केतमा देखाउने

चरण 6 : वृत्तचित्रको शीर्षक राख्ने, अब वृत्तचित्र तयार भयो।

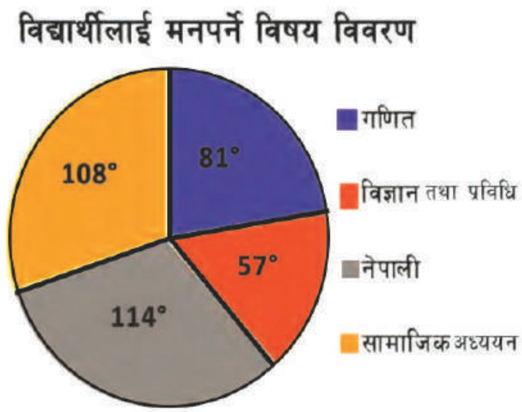
क्रियाकलाप 2

एउटा माध्यमिक विद्यालयमा अध्ययनरत 600 जना विद्यार्थीलाई 'कुन विषय मनपर्छ ?' भनी सोधिएको प्रश्नमा प्राप्त उत्तरका आधारमा तयार गरिएको वृत्तचित्र तल दिइएको छ। सो वृत्त चित्रको अध्ययन गरी सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(क) प्रत्येक विषय मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या निकाल्नुहोस्।

(ख) सबैभन्दा धेरै र सबैभन्दा कम मन पराउने विषयको विद्यार्थी सङ्ख्याबिचको फरक कति छ, पत्ता लगाउनुहोस्।

(ग) गणित र विज्ञान तथा प्रविधि विषय मन पराउने कति कति प्रतिशत विद्यार्थी रहेछन् ?



समाधान

यहाँ जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या = 600 जना

$360^\circ = 600$

$\therefore \quad 1^\circ = \frac{600}{360} = \frac{5}{3}$ जना

(क) नेपाली विषय मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या = $114^\circ = 114 \times \frac{5}{3} = 190$ जना गणित विषय मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या = $81^\circ = 81 \times \frac{5}{3} = 135$ जना विज्ञान तथा प्रविधि विषय मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या = $57^\circ = 57 \times \frac{5}{3} = 95$ जना सामाजिक अध्ययन विषय मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या = $108^\circ = 108 \times \frac{5}{3} = 180$ जना

(ख) सबैभन्दा बढी मन पराउने नेपाली विषयको विद्यार्थी सङ्ख्या = 190 जना सबैभन्दा कम मन पराउने विज्ञान तथा प्रविधि विषयको विद्यार्थी सङ्ख्या = 95 जना फरक = $190 - 95 = 95$ जना

(ग) गणित मन पराउनेको प्रतिशत $= \frac{135}{600} \times 100\% = 22.5\%$ विज्ञान मन पराउनेको प्रतिशत $= \frac{95}{600} \times 100\% = 15.8\%$ उदाहरण

क्रियाकलाप 3

लाक्पाले आफ्नो मासिक खर्च र बचत विवरणलाई शीर्षकगत छुट्याएको विवरण तलको तालिकामा दिइएको छ । यसलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

शीर्षक	खानामा	स्वास्थमा	शिक्षामा	बचत
रकम (प्रतिशतमा)	40	15	30	15

समाधान

यहाँ जम्मा आम्दानी $= 100\%$

100% आम्दानीलाई $= 360^{\circ}$ मा देखाउन सकिन्छ ।

1% आम्दानीलाई $= \left(\frac{360^{\circ}}{100}\right)^{\circ} = \left(\frac{18^{\circ}}{5}\right)^{\circ}$

अब खानामा $= 40\% = \left(\frac{18^{\circ}}{5}\right)^{\circ} \times 40 = 144^{\circ}$

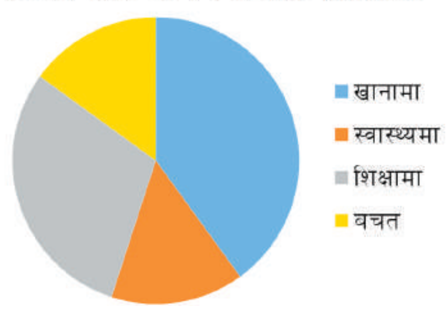
स्वास्थ्यमा $= 15\% = \left(\frac{18^{\circ}}{5}\right)^{\circ} \times 15 = 54^{\circ}$

शिक्षामा $= 30\% = \left(\frac{18^{\circ}}{5}\right)^{\circ} \times 30 = 108^{\circ}$

बचत $= 15\% = \left(\frac{18^{\circ}}{5}\right)^{\circ} \times 15 = 54^{\circ}$

माथिको तथ्याङ्कलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्दा,

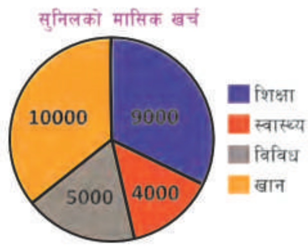
लाक्पाको मासिक खर्च र बचत विवरण (प्रतिशतमा)



अभ्यासका लागि प्रश्न

1. सुनीलले खाना, शिक्षा, स्वास्थ्य र विविध शीर्षकमा गरेको मासिक खर्च विवरण सँगैको वृत्त चित्रमा देखाइएको छ :

(क) सुनीलले गरेको खर्च शीर्षकमध्ये सबैभन्दा बढी खर्च कुन शीर्षकमा गरेको देखिन्छ ?



(ख) सुनीलले खाना, शिक्षा, स्वास्थ्य र विविध शीर्षकमा गरेको मासिक खर्चलाई डिग्री मानमा निकाल्नुहोस् ।

(ग) सुनीलको मासिक खर्चलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

2. एकता माध्यमिक विद्यालयका विद्यार्थीको विवरण तालिकामा दिइएको छ । उक्त तालिकालाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

कक्षा	V	VI	VII	VIII	जम्मा
विद्यार्थी सङ्ख्या	53	43	46	50	192

3. पेम्बाको मासिक खर्चको शीर्षकगत विवरण तालिकामा दिइएको छ । यसलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

शीर्षक	खाना	स्वास्थ्य	शिक्षा तथा यातायात	सञ्चार तथा घरभाडा
प्रतिशत	30%	15%	32%	23%

उत्तर

1. (क) खाना (ख) खाना 125.5°, शिक्षाा 116°, स्वास्थ्य 51°, विविध 64.5°

2. उत्तर सहजकर्तालाई देखाउनुहोस् । **3.** उत्तर सहजकर्तालाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 32

वैयक्तिक श्रेणीको मध्यक, मध्यिका र रित (Mean, Median and Mode of Individual Series)

32.1 मध्यक (Mean)

अध्ययन गरौँ :

हरिनारायणका 6 जना साथी खाजा खान खाजाघर गएछन् । उनीहरूले आफ्नो रुचिअनुसारको खाजा खाएछन् । उनीहरूले खाजाको पैसा तिर्दा कति भयो भनी पसलेलाई सोधेछन् । पसलेले प्रत्येकको खाजाबापतको रकम अलग अलग टिपेर दिए ।

65, 75, 90, 85, 52, 78

माथिको तथ्याङ्कका आधारमा सोधिएका प्रश्नको उत्तर खोजी गरौँ :

(क) सबैभन्दा धेरै खानेले कति रुपियाँको खाजा खाएका रहेछन् ?

(ख) सबैभन्दा कम खानेले कति रुपियाँको खाजा खाएका रहेछन् ?

(ग) सबैले खाजाबापत जम्मा कति रुपियाँको खाजा खाएका रहेछन् ?

(घ) उनीहरूले सबैले बराबर पैसा तिर्ने सल्लाह गरेछन् भने एक जनाको भागमा कति रुपियाँ तिर्नुपर्ने भयो ?

(ङ) बराबर तिर्दा एक जनाले तिर्नुपर्ने रकमले केलाई जनाउँछ ?

बराबर तिर्दा एक जनाले तिर्नुपर्ने रकमले मध्यकलाई जनाउँछ ।

कुनै पनि तथ्याङ्कको योगफललाई त्यसको सङ्ख्याले भाग गर्दा आउने भागफललाई सो तथ्याङ्कको औसत (Mean) भनिन्छ । यसलाई अङ्क गणितीय मध्यक (Arithmetic mean) वा मध्यक मात्र पनि भनिन्छ । यसलाई सङ्केतका रूपमा $\overline{X}$ लेखिन्छ । यदि दिइएको तथ्याङ्कलाई X ले जनाउँदा तथ्याङ्कको योगफललाई ΣX लेखिन्छ र n ओटा तथ्याङ्क भए मध्यक $\overline{X} = \frac{\Sigma X}{n}$ हुन्छ ।

क्रियाकलाप 1

गणित विषयको 50 पूर्णाङ्कको परीक्षामा विद्यार्थीले पाएको प्राप्ताङ्क दिइएको छ । उक्त तथ्याङ्कबाट विद्यार्थीको औसत प्राप्ताङ्क पत्ता लगाउनुहोस् : 24, 32, 33, 21, 12, 45, 13, 37, 28, 5

समाधान

यहाँ प्राप्ताङ्कको योगफल $(\Sigma X) = 24+32+33+21+12+45+13+37+28+5 = 250$

जम्मा प्राप्ताङ्कको योगफललाई जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्याले भाग गर्दा प्राप्त हुने भागफल नै मध्यक प्राप्ताङ्क हुन्छ ।

जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या $(n) = 10$

औसत प्राप्ताङ्क = मध्यक $(\overline{X}) = ?$

हामीलाई थाहा छ,

औसत प्राप्ताङ्क (मध्यक) $\overline{X} = \dfrac{\Sigma X}{n} = \dfrac{250}{10}$

$\therefore$ औसत प्राप्ताङ्क = 25

उदाहरण 1

दिइएको तथ्याङ्कको औसत मान 15 भए a को मान निकाल्नुहोस् :

12, 15, 18, a र 14

समाधान

यहाँ स्कोरको योगफल $(\Sigma X) = 12 + 15 + 18 + a + 14 = 59 + a$

$n = 5$ र औसत स्कोर $(\overline{X}) = 15$ छ ।

हामीलाई थाहा छ, मध्यक $(\overline{X}) = \dfrac{\Sigma X}{n}$

or, $15 = \dfrac{59 + a}{5}$

जम्मा प्राप्ताङ्कको योगफललाई जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्याले भाग गर्दा प्राप्त हुने भागफल नै मध्यक प्राप्ताङ्क हुन्छ ।

or, $75 = 59 + a$

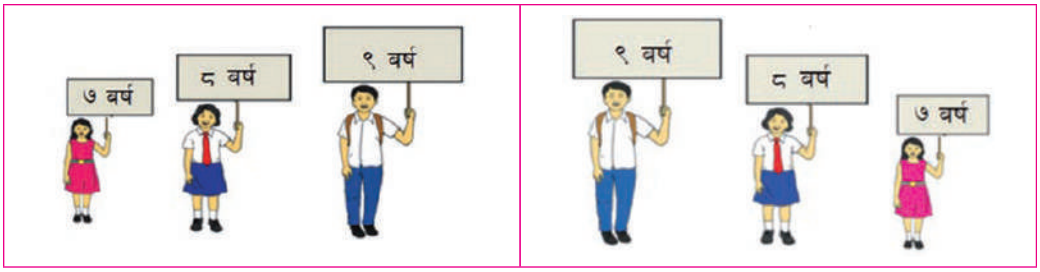
or, $75 - 59 = a$

$\therefore$ $a = 16$ हुन्छ ।

32.2 मध्यिका (Median)

तलका दुई अवस्थाका बारेमा अध्ययन गरौँ :

(अ) दिइएको पहिलो चित्रमा विद्यार्थीलाई वर्षका आधारमा क्रमशः सानोबाट ठुलो क्रममा राखिएको छ । त्यस्तै गरी दोस्रो चित्रमा विद्यार्थीलाई वर्षका आधारमा क्रमशः ठुलोबाट सानो क्रममा राखिएको छ ।



दुवै तरिकाबाट राख्दा बिचमा कति वर्षको विद्यार्थी परेको छ ?

बिचमा परको विद्यार्थीको अगाडि र पछाडि कति कति जना विद्यार्थी परेका छन् ?

यस्तो बिचमा परेको मानलाई के भनिन्छ ?

दुवै तरिकाबाट राख्दा बिचमा आठ वर्षको विद्यार्थी परेको छ । बिचमा परेको विद्यार्थीको अगाडि र पछाडि एक एक जना विद्यार्थी छन् । यसरी बिचमा पर्ने मानलाई मध्यिका भनिन्छ ।

क्रियाकलाप १

चित्रमा फरक फरक लम्बाइ भएका पाँचओटा लट्ठीलाई तिनीहरूको उचाइको अधारमा होचोबाट अग्लोसम्म मिलाएर राखिएको छ ।

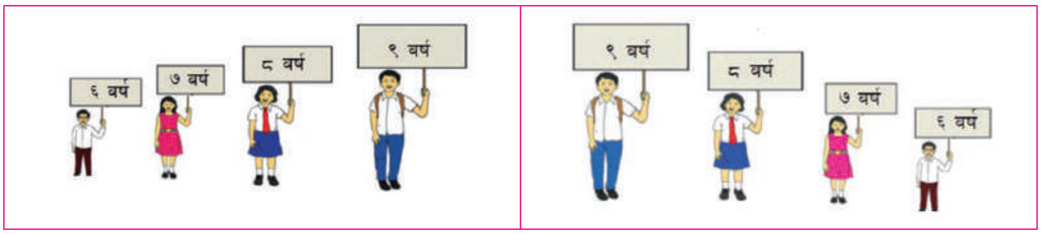
चित्रमा तेस्रो लट्ठीलाई आधार मान्दा, त्यो लट्ठीभन्दा अगाडि र पछाडि बराबर अथवा 2 र 2 ओटा लट्ठी छन् । तसर्थ, बिचमा पर्ने लट्ठीको उचाइ वा तेस्रो लट्ठीको उचाइ नै ती लट्ठीहरूको उचाइको मध्यिका मान हुन्छ । यसरी पाँचओटा लट्ठीमा तेस्रो लट्ठी मध्यिका

भयो । तसर्थ $\frac{5+1}{2}$ औँ लट्ठी वा 3 औँ लट्ठी मध्यिका मान भयो ।

मध्यिकाले तथ्याङ्कहरूलाई बराबर दुई भागमा विभाजन गर्छ । तसर्थ, मध्यिका मानबाट तल र माथि दुवैतिर बराबर तथ्याङ्क पर्छन् । मध्यिकालाई Md ले जनाइन्छ । त्यसकारण मध्यिका $\frac{n+2}{1}$ औँ पद हुन्छ ।

(आ) तलका दुई अवस्थाका बारेमा अध्ययन गरौँ :

दिइएको चित्रमा विद्यार्थीहरूलाई वर्षका आधारमा क्रमशः सानोबाट ठुलो र ठुलोबाट सानो क्रममा राखिएको छ ।



(क) अब बिचमा कति वर्षको विद्यार्थी परेको छ ?

(ख) यस्तो अवस्थामा बिचमा परको विद्यार्थी कसरी पत्ता लगाउने होला ?

यसरी वर्षअनुसार अग्लोदेखि होचोको क्रममा राख्दा बिचमा कुन विद्यार्थी परेको छ भन्न कठिन भयो । यदि सात वर्षकालाई बिच मान्ने हो भने अगाडि एक जना र पछाडि दुई जना विद्यार्थी हुन्छन् । यदि आठ वर्षकालाई बिच मान्ने हो भने अगाडि दुई जना र पछाडि एक जना विद्यार्थी हुन्छन् । यस्तो अवस्थामा सात वर्ष र आठ वर्षको बिचको स्थानलाई मध्यिका पर्ने स्थान मानिन्छ । यही बिचको मान $\frac{7+8}{2} = 7.5$ नै मध्यिका हो ।

तथ्याङ्कलाई सानोदेखि ठुलो वा ठुलो देखि सानो क्रममा मिलाएर राख्दा ठिक बिचमा परेको मानलाई तिनीहरूको मध्यिका भनिन्छ । अर्थात् कुनै पनि तथ्याङ्कलाई बराबर दुई भागमा विभाजन गर्ने मानलाई मध्यिका (Median) भनिन्छ । यसलाई सङ्केतका रूपमा Md लेखिन्छ । त्यसकारण मध्यिका स्थान पत्ता लगाउँदा $\frac{n+1}{2}$ औँ पद हुन्छ ।

तथ्याङ्कको सङ्ख्या बिजोर भएमा त्यस तथ्याङ्कको बिचमा पर्ने मान मध्यमान हुन्छ । तथ्याङ्कको सङ्ख्या जोर भएमा बिचमा पर्ने मान दुईओटा हुन्छन् । यस्तो अवस्थामा बिचमा परेका दुईओटा मानको अङ्कगणितीय मध्यक नै उक्त तथ्याङ्कको मध्यिका हुन्छ ।

मध्यिकलाई तलको चित्रबाट पनि थप स्पष्ट पार्न सकिन्छ :

उदाहरण 1

कक्षा 8 का विद्यार्थीसँग कतिओटा कलम छन् भनी सङ्कलन गरिएको तथ्याङ्कबाट मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् :

4, 12, 13, 11, 8, 15, 10

समाधान

यहाँ दिइएका तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा राख्दा,

4, 8, 10, 11, 12, 13, 15

जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या (n) = 7

मध्यिका (Md) = ?

हामीलाई थाहा छ,

मध्यिका $= \dfrac{n+1}{2}$ औँ पद

मध्यिका $= \dfrac{7+1}{2}$ औँ पद

मध्यिका $= 4$ औँ पद $\therefore$ मध्यिका $= 11$ हुन्छ ।

उदाहरण 4

यदि 8 जना विद्यार्थीको तौल 45kg, 42kg, 44kg, 50kg, 45kg, 48kg, 40kg र 43kg छ भने मध्यिका निकाल्नुहोस् :

समाधान

यहाँ दिइएको तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा राख्दा,

40kg, 42kg, 43kg, 44kg, 45kg, 45kg, 48kg, 50kg

जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या (n) = 8

मध्यिका (Md) = ?

हामीलाई थाहा छ,

मध्यिका $= \dfrac{n+1}{2}$ औँ पद

दिइएको तथ्याङ्कमा चौथो पद 44 र पाँचौँ पद 45 हो । तथ्याङ्कको बिचमा पर्ने मान एउटा मात्र छैन । यस्तो अवस्थामा बिचमा परेका दुईओटा मान 44 र 45 को औसत वा अङ्कगणितीय मध्यक नै मध्यिका हुन्छ ।

मध्यिका $= \dfrac{8+1}{2}$ औँ पद

मध्यिका $= 4.5$ औँ पद

मध्यिका $= \dfrac{44+45}{2}$

$\therefore$ मध्यिका $= 44.5$ kg हुन्छ ।

32.3 रित (Mode)

अध्ययन गरौँ :

प्रेरणा महिला विद्यालयका कक्षा 8 मा उपस्थित भएका विद्यार्थीले लगाएको जुत्ताको नम्बर कति कति रहेछ भनी सोध्दा निम्नानुसारको तथ्याङ्क प्राप्त भयो :

5, 6, 7, 5, 6, 6, 5, 6, 6, 7, 6, 5, 7 माथिको तथ्याङ्कका आधारमा सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(क) सबैभन्दा धेरैले लगाउने कुन नम्बरको जुत्ता रहेछ ?

(ख) सबैभन्दा धेरै पटक दोहोरिएको मानलाई के भनिन्छ ?

कुनै पनि तथ्याङ्कमा सबैभन्दा बढी पटक दोहोरिएको मानलाई रित (Mode) भनिन्छ । माथिको तथ्याङ्कमा सबैभन्दा धेरै दोहोरिएको जुत्ता नम्बर ट हो । 6 नै दिइएको तथ्याङ्कको रित मान हो ।

उदाहरण 1

यदि कक्षा 8 का 10 जना विद्यार्थीको उचाइ 145cm, 149cm, 140cm, 148cm, 142cm, 149cm, 142cm, 155cm, 150cm र 149cm छ भने रित निकाल्नुहोस् :

समाधान

यहाँ दिइएका तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा राख्दा,

140cm, 142cm, 142cm, 145cm, 148cm, 149cm, 149cm, 149cm, 150cm र 155cm

यहाँ, 149cm उचाइ हुने विद्यार्थीको सङ्ख्या 3 छ । यो नै धेरै विद्यार्थीको उचाइ हो ।

$\therefore$ रित (Mode) = 149cm हुन्छ ।

अभ्यासका लागि प्रश्न

1. दिइएको तथ्याङ्कबाट अङ्क गणितीय मध्यक (Arithmetic Mean) निकाल्नुहोस् :

(क) 5, 23, 28, 19, 14, 11, 22

(ख) 74, 95, 68, 34, 91, 115, 88, 87

(ग) 35, 45, 57, 62, 47, 78, 29, 16, 44, 37

(घ) 115, 127, 119, 156, 128, 198, 212, 180, 100

2. तलका तथ्याङ्कबाट m को मान निकाल्नुहोस् :

(क) $\Sigma X = 65 + m, n = 10$ र मध्यक $(\overline{X}) = 7$

(ख) $\Sigma X = 117$, $n = 8 + m$ र मध्यक $(\overline{X}) = 13$

(ग) $\Sigma X = 10 + m$, $n = 4$ र मध्यक $(\overline{X}) = 5$

(घ) $\Sigma X = 242 + 22a$, $n = 11 + a$ र मध्यक $(\overline{X}) = ?$

3. तलका तथ्याङ्कबाट मध्यिका (Median) निकाल्नुहोस् :

(क) 28, 30, 18, 15, 30, 25, 16

(ख) 250, 282, 211, 290, 245, 288, 127, 215, 245, 258

(ग) 44, 42, 45, 28, 55, 86, 68, 25

(घ) 110kg, 105kg, 106kg, 108kg, 111kg, 119kg, 114kg, 112kg, 113kg

4. (क) यदि x, x + 2, x + 3, x + 6 र x + 4 बढ्दो क्रममा छन् र सोको मध्यिका 12 भए x को मान निकाल्नुहोस् ।

5. दिइएको तथ्याङ्कबाट रित (Mode) निकाल्नुहोस् :

(क) 2, 1, 1, 2, 4, 5, 6, 1, 1, 5, 6, 4, 1, 2

(ख) 3, 5, 9, 4, 4, 9, 4, 6, 5, 4

(ग) 121, 125, 130, 125, 121, 135, 121, 140

उत्तर

1.	(क) 17.42	(ख) 81.5	(ग) 45	(घ) 148.33
2.	(क) 5	(ख) 1	(ग) 10	(घ) 22
3.	(क) 25	(ख) 254	(ग) 44.5	(घ) 110.5 kg
4.	(क) 9			
5.	(क) 1	(ख) 4	(ग) 121	

गणित तह -३, (कक्षा ६-८) भाग दुई

नेपाल सरकार

शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय

शिक्षा तथा मानव स्रोत विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर